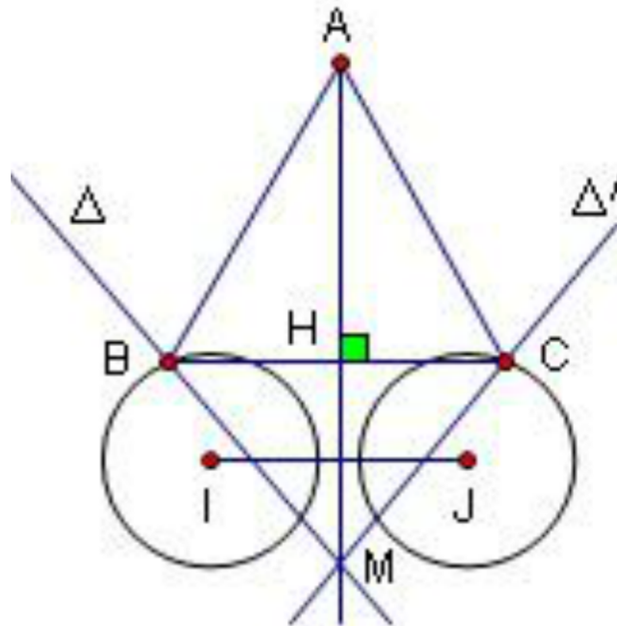
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

Nguyễn Minh Tiến



PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

Vấn đề 1 : PHÉP DỜI HÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phép biến hình.

▪ ĐN: Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm M của mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất điểm M' của mặt phẳng. Điểm M' gọi là ảnh của M qua phép biến hình đó.

▪ Kí hiệu: f là một phép biến hình nào đó, và M' là ảnh của M qua phép f. Ta viết:
$M' = f\left(M\right)$ hay $f\left(M\right) = M'$ hay $f: M \mapsto M'$ hay $M \xrightarrow{f} M'$.

Lưu ý : + Điểm M gọi là tạo ảnh, M' là ảnh.

+ f là phép biến hình đồng nhất $\Leftrightarrow f\left(M\right) = M$, $\forall M \in H$. Điểm M gọi là điểm bất động, điểm kép, bất biến.

+ f_1, f_2 là các phép biến hình thì $f_2 \circ f_1$ là phép biến hình.

▪ Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp các điểm $M' = f\left(M\right)$, với $M \in H$, tạo thành hình H' được gọi là ảnh của H qua phép biến hình f, và ta viết: $H' = f\left(H\right)$.

2/ Phép dời hình.

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, tức là với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có: $M'N' = MN$.(Bảo toàn khoảng cách)

3/ Tính chất (của phép dời hình):

▪ ĐL: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng.

▪ HQ: Phép dời hình biến:
+ Đường thẳng thành đường thẳng.
+ Tia thành tia.
+ Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
+ Tam giác thành tam giác bằng nó. (Trực tâm $\to$ trực tâm, trọng tâm $\to$ trọng tâm,…)
+ Đường tròn thành đường tròn bằng nó. (Tâm biến thành tâm: $I \to I', R' = R$)
+ Góc thành góc bằng nó.

B . BÀI TẬP

1 Trong mpOxy cho phép biến hình f: $M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$.

Tìm ảnh của các điểm sau : a) $A(1;2)$ b) $B(-1;2)$ c) $C(2;-4)$

Giải :
a) $A' = f(A) = (1;5)$
b) $B' = f(B) = (-7;6)$
c) $C' = f(C) = (3;-1)$

2 Trong mpOxy cho phép biến hình f : $M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = \begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x - 2y + 3 \end{cases}$.

Tìm ảnh của các điểm sau : a) $A(2;1)$ b) $B(-1;3)$ c) $C(-2;4)$

Giải :
a) $A' = f(A) = (4;3)$
b) $B' = f(B) = (-4;-4)$
c) $C' = f(C) = (-7;-7)$

3 Trong mpOxy cho phép biến hình f : $M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (3x;y)$. Đây có phải là phép dời hình hay không ?

Giải : Lấy hai điểm bất kì $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$

Khi đó $f: M(x_1;y_1) \longmapsto M' = f(M) = (3x_1;\ y_1)$.

$f: N(x_2;y_2) \longmapsto N' = f(N) = (3x_2;y_2)$

Ta có : $MN = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $M'N' = \sqrt{9(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Nếu $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$. Vậy : f không phải là phép dời hình .

(Vì có 1 số điểm f không bảo toàn khoảng cách) .

4 Trong mpOxy cho 2 phép biến hình :

a) $f: M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (y\ ;\ x\text{-}2)$ b) $g: M(x;y) \longmapsto M' = g(M) = (\ 2x\ ;\ y+1)$.

Phép biến hình nào trên đây là phép dời hình ?

HD :

a) f là phép dời hình b) g không phải là phép dời hình (vì $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$)

5 Trong mpOxy cho 2 phép biến hình :

a) $f: M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (y+1\ ;\ -x)$ b) $g: M(x;y) \longmapsto M' = g(M) = (\ x\ ;\ 3y\ )$.

Phép biến hình nào trên đây là phép dời hình ?

Giải :

a) f là phép dời hình b) g không phải là phép dời hình (vì $y_1 \neq y_2$ thì $M'N' \neq MN$)

6 Trong mpOxy cho phép biến hình $f: M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (-2x\ ;y+1)$. Tìm ảnh của đường thẳng $(\Delta): x-3y-2=0$ qua phép biến hình f .

Giải :

Cách 1 : Dùng biểu thức toạ độ

Ta có $f: M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = \begin{cases} x' = -2x \\ y' = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-x'}{2} \\ y = y'-1 \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (\Delta) \Leftrightarrow (\dfrac{-x'}{2}) - 3(y'-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x'+6y'-2=0 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (\Delta'): x+6y-2=0$

Cách 2 : Lấy 2 điểm bất kì $M,N \in (\Delta): M \neq N$.

$+ M \in (\Delta): M(2;0) \longmapsto M' = f(M) = (-4;1)$

$+ N \in (\Delta): N(-1;-1) \longmapsto N' = f(N) = (2;0)$

$(\Delta') \equiv (M'N'): \begin{cases} \text{Qua } M'(-4;1) \\ \text{VTCP}: \overrightarrow{M'N'} = (6;-1) \end{cases} \to$ PTCtắc $(\Delta'): \dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-1}{-1} \Rightarrow$ PTTQ $(\Delta'): x+6y-2=0$

7 Trong mpOxy cho phép biến hình $f: M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (x+3\ ;y+1)$.

a) CMR f là phép dời hình .

b) Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$. $\longmapsto (C'): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

8 Trong mpOxy cho phép biến hình $f: M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (x-3\ ;y+1)$.

a) CMR f là phép dời hình .

b) Tìm ảnh của đường thẳng $(\Delta): x+2y-5=0$.

c) Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$.

d) Tìm ảnh của elip $(E): \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

Giải : a) Lấy hai điểm bất kì $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$

Khi đó $f : M(x_1;y_1) \longmapsto M' = f(M) = (x_1 - 3;\ y_1 + 1)$.

$f : N(x_2;y_2) \longmapsto N' = f(N) = (x_2 - 3;\ y_2 + 1)$

Ta có : $M'N' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN$

Vậy : f là phép dời hình .

b) Cách 1 : Dùng biểu thức toạ độ

Ta có $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (\Delta) \Leftrightarrow (x'+3) + 2(y'-1) - 5 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' - 4 = 0 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (\Delta') : x + 2y - 4 = 0$

Cách 2 : Lấy 2 điểm bất kì $M, N \in (\Delta) : M \neq N$.

$+ M \in (\Delta) : M(5\ ;0) \longmapsto M' = f(M) = (2;1)$

$+ N \in (\Delta) : N(3\ ;\ 1) \longmapsto N' = f(N) = (0;2)$

$(\Delta') \equiv (M'N') : \begin{cases} \text{Qua } M'(2;1) \\ \text{VTCP} : \overrightarrow{M'N'} = (-2;1) \end{cases} \rightarrow$ PTCtắc $(\Delta') : \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow$ PTTQ $(\Delta') : x + 2y - 4 = 0$

Cách 3 : Vì f là phép dời hình nên f biến đường thẳng (Δ) thành đường thẳng $(\Delta') \,//\, (\Delta)$.

+ Lấy $M \in (\Delta) : M(5\ ;0) \longmapsto M' = f(M) = (2;1)$

+ Vì $(\Delta') \,//\, (\Delta) \Rightarrow (\Delta') : x + 2y + m = 0\ (m \neq -5)$. Do : $(\Delta') \ni M'(2;1) \Rightarrow m = -4 \Rightarrow (\Delta') : x + 2y - 4 = 0$

c) Cách 1 : Dùng biểu thức toạ độ

Ta có $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (C) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow (x'+4)^2 + (y'-3)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M'(x';y') \in (C') : (x+4)^2 + (y-3)^2 = 2$

Cách 2 : $(C) \begin{cases} +\text{ Tâm } I(-1;2) \\ +\text{ BK} : R = \sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{f} (C') \begin{cases} +\text{ Tâm } I' = f[I(-1;2)] = (-4;3) \\ +\text{ BK} : R' = R = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow (C') : (x+4)^2 + (y-3)^2 = 2$

d) Dùng biểu thức toạ độ

Ta có $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (E) : \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x'+3)^2}{3} + \dfrac{(y'-1)^2}{2} = 1 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (E') : \dfrac{(x+3)^2}{3} + \dfrac{(y-1)^2}{2} = 1$

9 Trong mpOxy cho phép biến hình $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (x + 1\,;y - 2)$.

a) CMR f là phép dời hình .

b) Tìm ảnh của đường thẳng $(\Delta) : x - 2y + 3 = 0$.

c) Tìm ảnh của đường tròn $(C) : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

d) Tìm ảnh của parabol $(P) : y^2 = 4x$.

ĐS : b) $x - 2y - 2 = 0$ c) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$ d) $(y + 2)^2 = 4(x - 1)$

10 Trong mpOxy cho phép biến hình $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (-x\,;y)$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A. f là 1 phép dời hình

B. Nếu $A(0\ ;\ a)$ thì $f(A) = A$

C. M và f(M) đối xứng nhau qua trục hoành

D. $f[M(2;3)] \in$ đường thẳng $2x + y + 1 = 0$

ĐS : Chọn C . Vì M và f(M) đối xứng nhau qua trục tung $\to$ C sai .

12 Trong mpOxy cho 2 phép biến hình :

$f_1 : M(x;y) \longmapsto M' = f_1(M) = (x + 2 ; y - 4)$; $f_2 : M(x;y) \longmapsto M' = f_2(M) = (-x ; -y)$.

Tìm toạ độ ảnh của $A(4;-1)$ qua f_1 rồi f_2 , nghĩa là tìm $f_2[f_1(A)]$.

ĐS : $A(4;-1) \xmapsto{f_1} A'(6;-5) \xmapsto{f_2} A''(-6 ; 5)$.

11 Trong mpOxy cho phép biến hình $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (\frac{x}{2};-3y)$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A. $f(O) = O$ (O là điểm bất biến)

B. Ảnh của $A \in Ox$ thì ảnh $A' = f(A) \in Ox$.

C. Ảnh của $B \in Oy$ thì ảnh $B' = f(B) \in Oy$.

D. $M' = f[M(2;-3)] = (1;-9)$

ĐS : Chọn D . Vì $M' = f[M(2;-3)] = (1;9)$

Vấn đề 2 : PHÉP TỊNH TIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ ĐN: Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ là một phép dời hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Kí hiệu : T hay $T_{\vec{u}}$ .Khi đó : $T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

- Phép tịnh tiến hoàn toàn được xác định khi biết vectơ tịnh tiến của nó .
- Nếu $T_{\vec{0}}(M) = M$, $\forall M$ thì $T_{\vec{0}}$ là phép đồng nhất .

2/ Biểu thức tọa độ: Cho $\vec{u} = (a;b)$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

$$M(x;y) \longmapsto M' = T_{\vec{u}}(M) = (x';y') \text{ thì } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

3/ Tính chất:

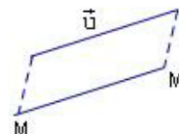
- ĐL : Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì .
- HQ :

1. Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng .
2. Biến một tia thành tia .
3. Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng .
5. Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .
6. Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho .
7. Biến tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\longmapsto$ trực tâm , trọng tâm $\longmapsto$ trọng tâm)
8. Đường tròn thành đường tròn bằng nó .

(Tâm biến thành tâm : $I \longmapsto I'$, $R' = R$)

◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM**

$$M(x;y) \longmapsto M' = T_{\vec{u}}(M) = (x';y') \text{ thì } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



◆ **PHƯƠNG PHÁP TÌM ẢNH CỦA MỘT HÌNH (H) .**

Cách 1: Dùng tính chất (cùng phương của đường thẳng, bán kính đường tròn: không đổi)

1/ Lấy $M \in (H) \longmapsto M' \in (H')$

2/ - $(H) \equiv$ đường thẳng $\longrightarrow (H') \equiv$ đường thẳng cùng phương

$(H) \equiv (C)\begin{cases} +\text{Tâm } I \\ +\text{ bk}: R \end{cases} \longmapsto (H') \equiv (C')\begin{cases} +\text{Tâm } I' \\ +\text{ bk}: R' = R \end{cases}$ (cần tìm I') .

Cách 2 : Dùng biểu thức tọa độ .

Tìm x theo x' , tìm y theo y' rồi thay vào biểu thức tọa độ .

Cách 3 : Lấy hai điểm phân biệt : $M, N \in (H) \longmapsto M', N' \in (H')$

B. BÀI TẬP

1 Trong mpOxy . Tìm ảnh của M' của điểm $M(3;-2)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2;1)$.

Giải

Theo định nghĩa ta có : $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow (x'-3; y'+2) = (2;1) \Leftrightarrow \begin{cases} x'-3 = 2 \\ y'+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow M'(5;-1)$

2 Tìm ảnh các điểm chỉ ra qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$:

a) $A(-1;1)$, $\vec{u} = (3;1)$ $\Rightarrow A'(2;3)$

b) $B(2;1)$, $\vec{u} = (-3;2)$ $\Rightarrow B'(-1;3)$

c) $C(3;-2)$, $\vec{u} = (-1;3)$ $\Rightarrow C'(2;1)$

3 Trong mpOxy . Tìm ảnh A', B' lần lượt của điểm $A(2;3)$, $B(1;1)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (3;1)$. Tính độ dài $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$.

Giải

Ta có : $A' = T_{\vec{u}}(A) = (5;4)$, $B' = T_{\vec{u}}(B) = (4;2)$, $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, $A'B' = |\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{5}$.

4 Cho 2 vectơ $\vec{u}_1; \vec{u}_2$. Gỉa sử $M_1 = T_{\vec{u}_1}(M), M_2 = T_{\vec{u}_2}(M_1)$. Tìm $\vec{v}$ để $M_2 = T_{\vec{v}}(M)$.

Giải

Theo đề : $M_1 = T_{\vec{u}_1}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \vec{u}_1$, $M_2 = T_{\vec{u}_2}(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}_2$.

Nếu : $M_2 = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ .Vậy : $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

5 Đường thẳng Δ cắt Ox tại $A(-1;0)$, cắt Oy tại $B(0;2)$. Hãy viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2;-1)$.

Giải Vì : $A' = T_{\vec{u}}(A) = (1;-1)$, $B' = T_{\vec{u}}(B) = (2;1)$.

Mặt khác : $\Delta' = T_{\vec{u}}(\Delta) \Rightarrow \Delta'$ đi qua A', B' . Do đó : $\Delta' \begin{cases} \text{qua } A'(1;-1) \\ \text{VTCP}: \overrightarrow{A'B'} = (1;2) \end{cases}$ $\Rightarrow$ ptts $\Delta' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

6 Đường thẳng Δ cắt Ox tại $A(1;0)$, cắt Oy tại $B(0;3)$. Hãy viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-1;-2)$.

Giải

Vì : $A' = T_{\vec{u}}(A) = (0;-2)$, $B' = T_{\vec{u}}(B) = (-1;1)$.

Mặt khác : $\Delta' = T_{\vec{u}}(\Delta) \Rightarrow \Delta'$ đi qua A', B' . Do đó : $\Delta' \begin{cases} \text{qua } A'(0;-2) \\ \text{VTCP}: \overrightarrow{A'B'} = (-1;3) \end{cases}$ $\Rightarrow$ ptts $\Delta' : \begin{cases} x = -t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$

7 Tương tự : a) $\Delta : x - 2y - 4 = 0$, $\vec{u} = (0;3)$ $\Rightarrow \Delta' : x - 2y + 2 = 0$

b) $\Delta : 3x + y - 3 = 0$, $\vec{u} = (-1;-2)$ $\Rightarrow \Delta' : 3x + y + 2 = 0$

8 Tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (1; -3)$.

Giải

Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ là : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

Vì : $M(x;y) \in (C) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x'^2 + (y' + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (C') : x^2 + (y + 1)^2 = 4$

Vậy : Ảnh của (C) là $(C') : x^2 + (y + 1)^2 = 4$

9 Trong mpOxy cho phép biến hình $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (x + 1 ; y - 2)$.

a) CMR f là phép dời hình .

b) Tìm ảnh của đường thẳng $(\Delta) : x - 2y + 3 = 0$.

c) Tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

d) Tìm ảnh của parabol (P) : $y^2 = 4x$.

ĐS : b) $x - 2y - 2 = 0$ c) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$ d) $(y + 2)^2 = 4(x - 1)$

10 Trong mpOxy cho phép biến hình $f : M(x;y) \longmapsto M' = f(M) = (-x ; y)$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A. f là 1 phép dời hình

B. Nếu A(0 ; a) thì f(A) = A

C. M và f(M) đối xứng nhau qua trục hoành

D. $f[M(2;3)] \in$ đường thẳng $2x + y + 1 = 0$

ĐS : Chọn C . Vì M và f(M) đối xứng nhau qua trục tung $\to$ C sai .

9 Tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-2;4)$.

Giải : Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ là : $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 4 \end{cases}$

Vì : $M(x;y) \in (C) : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (C') : (x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 = 1$

Vậy : Ảnh của (C) là $(C') : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

BT Tương tự : a) (C) : $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$, $\vec{u} = (3;1)$ $\Rightarrow (C') : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

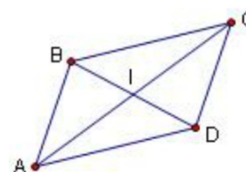
b) (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, $\vec{u} = (-2;3)$ $(C') : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$

10 Trong hệ trục toạ độ Oxy , xác định toạ độ các đỉnh C và D của hình bình hành ABCD biết đỉnh $A(-2;0)$, đỉnh $B(-1;0)$ và giao điểm các đường chéo là I(1;2) .

Giải

- Gọi C(x;y) .Ta có : $\overrightarrow{IC} = (x - 1; y - 2), \overrightarrow{AI} = (3;2), \overrightarrow{BI} = (2;-1)$
- Vì I là trung điểm của AC nên :

$C = T_{\overrightarrow{AI}}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \\ y - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(4;4)$



- Vì I là trung điểm của AC nên :

$D = T_{\overrightarrow{BI}}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 2 \\ y_D - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D(3;4)$

Bài tập tương tự : $A(-1;0), B(0;4), I(1;1)$ $\Rightarrow C(3;2), D(2;-2)$.

11 Cho 2 đường thẳng song song nhau d và d' . Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến d thành d' . Hỏi có bao nhiêu phép tịnh tiến như thế?

Giải : Chọn 2 điểm cố định $A \in d$, $A' \in d'$

Lấy điểm tuỳ ý $M \in d$. Gỉa sử : $M' = T_{\overrightarrow{AB}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M'B} \Rightarrow M'B // MA \Rightarrow M' \in d' \Rightarrow d' = T_{\overrightarrow{AB}}(d)$

Nhận xét : Có vô số phép tịnh tiến biến d thành d' .

12 Cho 2 đường tròn (I,R) và (I',R') .Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến (I,R) thành (I',R') .

Giải : Lấy điểm M tuỳ ý trên (I,R) . Gỉa sử : $M' = T_{\overrightarrow{II'}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{II'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{I'M'} \Rightarrow I'M' = IM = R \Rightarrow M' \in (I',R') \Rightarrow (I',R') = T_{\overrightarrow{II'}}[(I,R)]$

13 Cho hình bình hành ABCD , hai đỉnh A,B cố định , tâm I thay đổi di động trên đường tròn (C) .Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh BC.

Giải

Gọi J là trung điểm cạnh AB . Khi đó dễ thấy J cố định và $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{JB}$.

Vậy M là ảnh của I qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{JB}}$. Suy ra : Quỹ tích của M là ảnh của đường tròn (C) trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{JB}$

14 Trong hệ trục toạ độ Oxy , cho parabol (P) : $y = ax^2$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (m,n)$ và (P') là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến đó . Hãy viết phương trình của (P') .

Giải :

$\forall M(x;y) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} M'(x';y')$, ta có : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, với $\overrightarrow{MM'} = (x' - x\ ;\ y' - y)$

Vì $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = m \\ y' - y = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - m \\ y = y' - n \end{cases}$

Mà : $M(x;y) \in (P) : y = ax^2 \Leftrightarrow y' - n = a(x' - m)^2 \Leftrightarrow y' = a(x' - m)^2 + n \Leftrightarrow M'(x';y') \in (P') : y = a(x - m)^2 + n$

Vậy : Ảnh của (P) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ là $(P') : y = a(x - m)^2 + n \Leftrightarrow y = ax^2 - 2amx + am^2 + n$.

15 Cho đt $\Delta : 6x + 2y - 1 = 0$. Tìm vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ để $\Delta = T_{\vec{u}}(\Delta)$.

Giải : VTCP của Δ là $\vec{a} = (2; -6)$. Để : $\Delta = T_{\vec{u}}(\Delta) \Leftrightarrow \vec{u}$ cùng phương $\vec{a}$. Khi đó : $\vec{a} = (2; -6) = 2(1; -3)$

$\Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (1; -3)$.

16 Trong hệ trục toạ độ Oxy , cho 2 điểm $A(-5;2)$, $C(-1;0)$. Biết : $B = T_{\vec{u}}(A)$, $C = T_{\vec{v}}(B)$. Tìm $\vec{u}$ và $\vec{v}$ để có thể thực hiện phép biến đổi A thành C ?

Giải

$A(-5;2) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} B \xrightarrow{T_{\vec{v}}} C(-1;0)$. Ta có : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{BC} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v} = (4; -2)$

$T_{\vec{u}+\vec{v}}$

17 Trong hệ trục toạ độ Oxy , cho 3 điểm $K(1;2)$, $M(3;-1), N(2;-3)$ và 2 vectơ $\vec{u} = (2;3)$, $\vec{v} = (-1;2)$. Tìm ảnh của K,M,N qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ rồi $T_{\vec{v}}$.

HD : Gỉa sử : $A(x;y) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} B \xrightarrow{T_{\vec{v}}} C(x';y')$. Ta có : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{BC} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v} = (1;5)$

Do đó : $K' = T_{\vec{u}+\vec{v}}(K) \Leftrightarrow \overrightarrow{KK'} = (1;5) \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = 1 \\ y' - 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 7 \end{cases} \Rightarrow K'(2;7)$.

Tương tự : $M'(4;4)$, $N'(3;2)$.

18 Trong hệ trục toạ độ Oxy , cho ΔABC : $A(3;0)$, $B(-2;4)$, $C(-4;5)$. G là trọng tâm ΔABC và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ biến A thành G . Tìm $G' = T_{\vec{u}}(G)$.

Giải

$A(3;0)\xmapsto{T_{\vec{u}}} G(-1;3)\xmapsto{T_{\vec{u}}} G'(x';y')$

Vì $\overrightarrow{AG}=(-4;3)=\vec{u}$. Theo đề : $\overrightarrow{GG'}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x'+1=-4\\y'-3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-5\\y'=6\end{cases}\Rightarrow G'(-5;6).$

19 Trong mặt phẳng Oxy , cho 2 đường tròn (C) : $(x-1)^2+(y+3)^2=2$, $(C'): x^2+y^2-10x+4y+25=0$. Có hay không phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}$ biến (C) thành (C') .

HD : (C) có tâm $I(1;-3)$, bán kính $R=2$; (C') có tâm $I'(5;-2)$, bán kính $R'=2$.

Ta thấy : $R=R'=2$ nên có phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(4;1)$ biến (C) thành (C') .

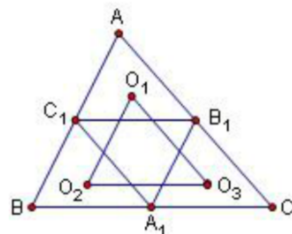
20 Trong hệ trục toạ độ Oxy , cho hình bình hành OABC với $A(-2;1)$ và $B\in\Delta: 2x-y-5=0$. Tìm tập hợp đỉnh C ?

Giải

- Vì OABC là hình bình hành nên : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=(2;-1)\Rightarrow C=T_{\vec{u}}(B)$ với $\vec{u}=(2;-1)$
- $B(x;y)\xmapsto{T_{\vec{u}}} C(x';y')$. Do : $\overrightarrow{BC}=\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-x=2\\y'-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+1\end{cases}$
- $B(x;y)\in\Delta\Leftrightarrow 2x-y-5=0\Leftrightarrow 2x'-y'-10=0\Leftrightarrow C(x';y')\in\Delta': 2x-y-10=0$

21 Cho ΔABC . Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC,CA,AB. Gọi O_1,O_2,O_3 và I_1,I_2,I_3 tương ứng là các tâm đường tròn ngoại tiếp và các tâm đường tròn nội tiếp của ba tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, và CA_1B_1 . Chứng minh rằng : $\Delta O_1O_2O_3=\Delta I_1I_2I_3$.

HD :



- Xét phép tịnh tiến : $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ biến $A\longmapsto C, C_1\longmapsto B, B_1\longmapsto A_1$.

$\Rightarrow \Delta AB_1C_1\xmapsto{T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}}\Delta C_1BA_1; O_1\xmapsto{T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}} O_2; I_1\xmapsto{T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}} I_2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{I_1I_2}\Rightarrow O_1O_2=I_1I_2$.

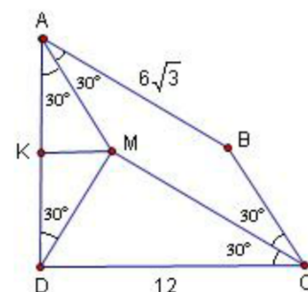
- Lý luận tương tự : Xét các phép tịnh tiến $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}, T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}}$ suy ra :

$\overrightarrow{O_2O_3}=\overrightarrow{I_2I_3}$ và $\overrightarrow{O_3O_1}=\overrightarrow{I_3I_1}\Rightarrow O_2O_3=I_2I_3, O_3O_1=I_3I_1\Rightarrow\Delta O_1O_2O_3=\Delta I_1I_2I_3$ (c.c.c).

22 Trong tứ giác ABCD có $AB=6\sqrt{3}$cm , $CD=12$cm , $\hat{A}=60^\circ,\hat{B}=150^\circ$ và $\hat{D}=90^\circ$. Tính độ dài các cạnh BC và DA .

HD :

- Xét : $A\xmapsto{T_{\overrightarrow{BC}}} M\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$. Ta có : ABCM là hình bình hành và $\widehat{BCM}=30^\circ$ (vì $\hat{B}=150^\circ$)



Lại có : $\widehat{BCD}=360^o-(90^\circ+60^\circ+150^\circ)=60^\circ\Rightarrow\widehat{MCD}=30^\circ$.

Định lý hàm cos trong ΔMCD :

$MD^2=MC^2+DC^2-2MC.DC.\cos 30^\circ=(6\sqrt{3})^2+(12)^2-2.6\sqrt{3}.12.\frac{\sqrt{3}}{2}=36$

$\Rightarrow MD=6$cm .

Ta có : $MD=\frac{1}{2}CD$ và $MC=MD\sqrt{3}$ $\Rightarrow\Delta MDC$ là tam giác đều

$\Rightarrow\Delta MCD$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow\widehat{DMC}=90^\circ$ và $\widehat{MDA}=30^\circ$.

Vậy : $\widehat{MDA}=\widehat{MAD}=\widehat{MAB}=30^\circ\Rightarrow\Delta AMD$ là tam giác cân tại M .

Dựng MK $\perp$ AD $\Rightarrow$ K là trung điểm của AD $\Rightarrow$ KD=MDcos$30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{2}$cm $\Rightarrow AD = 6\sqrt{3}$cm

Tóm lại : BC = AM = MD = 6cm , AD = AB = $6\sqrt{3}$cm

Vấn đề 3 : PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A . KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ ĐN1: Điểm M' gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng a nếu a là đường trung trực của đoạn MM'

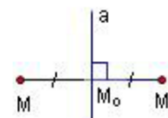
Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi là phép đối xứng trục . Đường thẳng a gọi là trục đối xứng.

ĐN2 : Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M′ đối xứng với M qua đường thẳng a .

Kí hiệu : $Đ_a(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM'} = -\overrightarrow{M_oM}$, với M_o là hình chiếu của M trên đường thẳng a .

Khi đó :

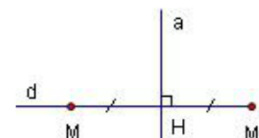
- Nếu $M \in a$ thì $Đ_a(M) = M$: xem M là đối xứng với chính nó qua a . (M còn gọi là điểm bất động)
- $M \notin a$ thì $Đ_a(M) = M' \Leftrightarrow$ a là đường trung trực của MM′
- $Đ_a(M) = M'$ thì $Đ_a(M') = M$
- $Đ_a(H) = H'$ thì $Đ_a(H') = H$, H′ là ảnh của hình H .
- ĐN : d là trục đối xứng của hình H $\Leftrightarrow Đ_d(H) = H$.
- Phép đối xứng trục hoàn toàn xác định khi biết trục đối xứng của nó .



Chú ý : Một hình có thể không có trục đối xứng ,có thể có một hay nhiều trục đối xứng .

2/ Biểu thức tọa độ: $M(x;y) \longmapsto M' = Đ_d(M) = (x';y')$

■ $d \equiv Ox : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ ■ $d \equiv Oy : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$



3/ ĐL: Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

HQ :

1. Phép đối xứng trục biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng .
2. Đường thẳng thành đường thẳng .
3. Tia thành tia .
4. Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .
5. Tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\longmapsto$ trực tâm , trọng tâm $\longmapsto$ trọng tâm)
6. Đường tròn thành đường tròn bằng nó . (Tâm biến thành tâm : $I \longmapsto I'$, $R' = R$)
7. Góc thành góc bằng nó .

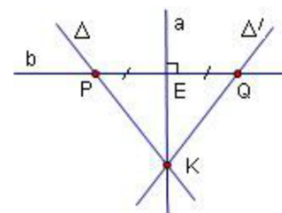
• PP : Tìm ảnh $M' = Đ_a(M)$

1. $(d) \ni M$, $d \perp a$
2. $H = d \cap a$
3. H là trung điểm của $MM' \rightarrow M'$?

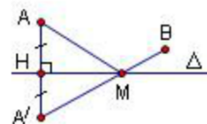
■ PP : Tìm ảnh của đường thẳng : $\Delta' = Đ_a(\Delta)$

◆ TH1 : $(\Delta) // (a)$

1. Lấy $A, B \in (\Delta) : A \neq B$
2. Tìm ảnh $A' = Đ_a(A)$
3. $\Delta' \ni A', \Delta' // (a) \rightarrow \Delta'$



- TH2 : $\Delta \not\parallel a$
  1. Tìm $K = \Delta \cap a$
  2. Lấy $P \in \Delta$: $P \neq K$ .Tìm $Q = Đ_a(P)$
  3. $\Delta' \equiv (KQ)$



■ ***PP*** **:** Tìm $M \in (\Delta)$: $(MA + MB)_{min}$.

Tìm $M \in (\Delta)$: $(MA+ MB)_{min}$

- Loại 1 : A, B nằm cùng phía đối với (Δ) :
  1) gọi A′ là đối xứng của A qua (Δ)
  2) $\forall M \in (\Delta)$, thì $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$

  Do đó: $(MA+MB)_{min} = A'B \Leftrightarrow M = (A'B) \cap (\Delta)$
- Loại 2 : A, B nằm khác phía đối với (Δ) :

  $\forall M \in (\Delta)$, thì $MA + MB \geq AB$

Ta có: $(MA+MB)_{min} = AB \Leftrightarrow M = (AB) \cap (\Delta)$

B . BÀI TẬP

1 Trong mpOxy . Tìm ảnh của M(2;1) đối xứng qua Ox , rồi đối xứng qua Oy .

HD : $M(2;1) \xmapsto{Đ_{Ox}} M'(2;-1) \xmapsto{Đ_{Oy}} M''(-2;-1)$

2 Trong mpOxy . Tìm ảnh của M(a;b) đối xứng qua Oy , rồi đối xứng qua Ox .

HD : $M(a;b) \xmapsto{Đ_{Oy}} M'(-a;b) \xmapsto{Đ_{Ox}} M''(-a;-b)$

3 Cho 2 đường thẳng (a) : $x - 2 = 0$, (b) : $y + 1 = 0$ và điểm $M(-1;2)$. Tìm : $M \xmapsto{Đ_a} M' \xmapsto{Đ_b} M''$.

HD : $M(-1;2) \xmapsto{Đ_a} M'(5;2) \xmapsto{Đ_b} M''(5;-4)$ [vẽ hình] .

4 Cho 2 đường thẳng (a) : $x - m = 0$ $(m > 0)$, (b) : $y + n = 0$ $(n > 0)$.

Tìm M″: $M(x;y) \xrightarrow{Đ_a} M'(x';y') \xrightarrow{Đ_b} M''(x'';y'')$.

HD : $M(x;y) \xmapsto[tđ(m;y)]{Đ_a} M' \begin{cases} x' = 2m - x \\ y' = y \end{cases} \xmapsto[tđ(2m-x;-n)]{Đ_b} M'' \begin{cases} x'' = 2m - x \\ y'' = -2n - y \end{cases}$

5 Cho điểm $M(-1;2)$ và đường thẳng (a) : $x + 2y + 2 = 0$.

HD : (d) : $2x - y + 4 = 0$, $H = d \cap a \to H(-2;0)$, H là trung điểm của $MM' \to M'(-3;-2)$

6 Cho điểm $M(-4;1)$ và đường thẳng (a) : $x + y = 0$. $\Rightarrow M' = Đ_a(M) = (-1;4)$

7 Cho 2 đường thẳng (Δ) : $4x - y + 9 = 0$, (a) : $x - y + 3 = 0$. Tìm ảnh $\Delta' = Đ_a(\Delta)$.

HD :

- Vì $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{-1}{-1} \Rightarrow \Delta$ cắt $a \to K = \Delta \cap a \to K(-2;1)$
- $M(-1;5) \in \Delta \to d \ni M, \perp a \to d: x + y - 4 = 0 \to H(1/2;7/2)$: tđiểm của $MM' \to M' = Đ_a(M) = (2;2)$
- $\Delta' \equiv KM'$: $x - 4y + 6 = 0$

8 Tìm $b = Đ_a(Ox)$ với đường thẳng (a) : $x + 3y + 3 = 0$.

HD : $a \cap Ox = K(-3;0)$.

- $M \equiv O(0;0) \in Ox$: $M' = Đ_a(M) = (-\dfrac{3}{5};-\dfrac{9}{5})$.
- $b \equiv KM'$: $3x + 4y + 9 = 0$.

9 Tìm $b = Đ_a(Ox)$ với đường thẳng (a) : $x + 3y - 3 = 0$.

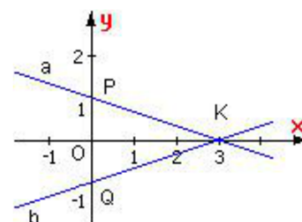
HD : • $a \cap Ox = K(3;0)$.

• $P \equiv O(0;0) \in Ox$.

• $\Delta \begin{cases} + \text{ Qua } O(0;0) \\ + \ \perp a \end{cases} \rightarrow \Delta : 3x - y = 0$

• $E = a \cap \Delta \rightarrow E(\frac{3}{10};\frac{9}{10})$ là trung điểm OQ $\rightarrow Q(\frac{3}{5};\frac{9}{5})$.

• $b \equiv KQ : 3x + 4y - 9 = 0$.



10 Tìm $b = Đ_{Ox}(a)$ với đường thẳng $(a) : x + 3y - 3 = 0$.

Giải :

<u>Cách 1</u>: Dùng biểu thức toạ độ (rất hay)

<u>Cách 2</u>: • $K = a \cap Ox \rightarrow K(3;0)$

• $P(0;1) \in a \Rightarrow Q = Đ_{Ox}(P) = (0;-1)$

• $b \equiv KQ : x - 3y - 3 = 0$.

11 Cho 2 đường thẳng $(\Delta) : x - 2y + 2 = 0$, $(a) : x - 2y - 3 = 0$. Tìm ảnh $\Delta' = Đ_a(\Delta)$.

PP : $\Delta // a$

<u>Cách 1</u> : Tìm $A,B \in \Delta \rightarrow A',B' \in \Delta' \Rightarrow \Delta' \equiv A'B'$

<u>Cách 2</u> : Tìm $A \in \Delta \rightarrow A' \in \Delta' \Rightarrow \Delta' // \Delta, \Delta' \ni A'$

Giải : • $A(0;1) \in \Delta \rightarrow A' = Đ_a(A) = (2;-3)$

• $\Delta' \ni A', \Delta' // \Delta \Rightarrow \Delta' : x - 2y - 8 = 0$

12 Cho đường tròn $(C) : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$, đường thẳng $(a) : 3x - y + 1 = 0$. Tìm $(C') = Đ_a[(C)]$

HD : $(C') : (x-3)^2 + y^2 = 1$.

13 Trong mpOxy cho ΔABC : $A(-1;6), B(0;1)$ và $C(1;6)$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A. ΔABC cân ở B

B. ΔABC có 1 trục đối xứng

C. $\Delta ABC = Đ_{Ox}(\Delta ABC)$

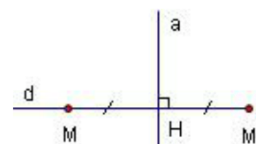
D. Trọng tâm : $G = Đ_{Oy}(G)$

HD : Chọn D

14 Trong mpOxy cho điểm $M(-3;2)$, đường thẳng $(\Delta) : x + 3y - 8 = 0$, đường tròn $(C) : (x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$.
Tìm ảnh của M, (Δ) và (C) qua phép đối xứng trục $(a) : x - 2y + 2 = 0$.

Giải : Gọi M′, (Δ') và (C′) là ảnh của M, (Δ) và (C) qua phép đối xứng trục a .

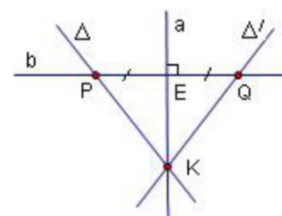
a) Tìm ảnh M′ : Gọi đường thẳng (d) : $\begin{cases} \text{• Qua } M(-3;2) \\ \text{• } \perp a \end{cases}$



+ $(d) \perp (a) \rightarrow (d) : 2x + y + m = 0$. Vì $(d) \ni M(-3;2) \Rightarrow m = 4 \Rightarrow (d) : 2x + y + 4 = 0$

+ $H = (d) \cap (a) \Rightarrow H(-2;0) \Rightarrow$ H là trung điểm của M,M′ $\Leftrightarrow H \begin{cases} x_H = \frac{1}{2}(x_M + x_{M'}) \\ y_H = \frac{1}{2}(y_M + y_{M'}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \frac{1}{2}(-3 + x_{M'}) \\ 0 = \frac{1}{2}(2 + y_{M'}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -1 \\ y_{M'} = -2 \end{cases} \Rightarrow M'(-1;-2)$$



b) Tìm ảnh (Δ') :

• Vì $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{-2} \Rightarrow (\Delta)$ cắt $(a) \Rightarrow K = (\Delta) \cap (a)$

$\Rightarrow$ Toạ độ của K là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow K(2;2)$

Lấy $P \neq K \Rightarrow Q = Đ_a[P(-1;3)] = (1;-1)$. (Làm tương tự như câu a))

Gọi đường thẳng (b) : $\begin{cases} \text{Qua } P(-1;3) \\ \perp a \end{cases}$

+ $(b) \perp (a) \to (b) : 2x + y + m = 0$. Vì $(b) \ni P(-1;3) \Rightarrow m = -1 \Rightarrow (b) : 2x + y - 1 = 0$

+ $E = (b) \cap (a) \Rightarrow E(0;1) \Rightarrow$ E là trung điểm của P,Q $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(x_P + x_Q) \\ y_E = \frac{1}{2}(y_P + y_Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2}(-1 + x_Q) \\ 1 = \frac{1}{2}(3 + y_Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 1 \\ y_Q = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(1;-1)$$

+ $(\Delta') \equiv (KQ) : \begin{cases} \text{Qua } K(2;2) \\ \text{VTCP} : \overrightarrow{KQ} = (-1;-3) = -(1;3) \end{cases} \Rightarrow (\Delta') : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0$

c) + Tìm ảnh của tâm $I(-3;2)$ như câu a) .

+ Vì phép đối xứng trục là phép dời hình nên (C):$\begin{cases} \text{Tâm } I \\ R = 2 \end{cases} \xmapsto{Đ_a} (C') : \begin{cases} \text{Tâm } I' \\ R' = R = 2 \end{cases}$. Tìm $I \xmapsto{Đ_a} I'$

Vậy : (C) $\begin{cases} + \text{ Tâm } I(-3;2) \\ + \text{ BK} : R = 2 \end{cases} \xmapsto{Đ_a} (C') \begin{cases} + \text{ Tâm } I' = Đ_a[I(-3;-2)] = (-\frac{2}{5};\frac{2}{5}) \\ + \text{ BK} : R' = R = 2 \end{cases}$

$\to (C') : (x + \frac{2}{5})^2 + (y - \frac{2}{5})^2 = 4$

15 Trong mpOxy cho điểm M(3;−5), đường thẳng $(\Delta) : 3x + 2y - 6 = 0$, đường tròn $(C) : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$.
Tìm ảnh của M, (Δ) và (C) qua phép đối xứng trục $(a) : 2x - y + 1 = 0$.

HD :

a) $M(3;-5) \xmapsto{Đ_a} M'(-\frac{33}{5};-\frac{1}{5}), (d) : x + 2y + 7 = 0$, tđiểm $H(-\frac{9}{5};-\frac{13}{5})$

b) + $K = \Delta \cap (a) \to K(\frac{4}{7};\frac{15}{7})$

+ $P \in (\Delta) : P(2;0) \neq K$, $Q = Đ_a[P(2;0)] = (-2;2)$ $\Rightarrow (\Delta') \equiv (KQ) : x - 18y + 38 = 0$

c) + $I(1;-2) \xmapsto{Đ_a} I'(-\frac{9}{5};\frac{8}{5})$, $R' = R = 3$ $\Rightarrow (C') : (x + \frac{9}{5})^2 + (y - \frac{8}{5})^2 = 9$

16 Cho điểm M(2;−3), đường thẳng $(\Delta) : 2x + y - 4 = 0$, đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.
Tìm ảnh của M, (Δ) và (C) qua phép đối xứng qua Ox .

HD : Ta có : $M(x;y) \xrightarrow{Đ_{Ox}} M'\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ $(1) \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ (2)

Thay vào (2) : $M(2;-3) \xrightarrow{Đ_{Ox}} M'(2;3)$

$M(x;y) \in (\Delta) \Leftrightarrow 2x' - y' - 4 = 0 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (\Delta') : 2x - y - 4 = 0$.

$M(x;y) \in (C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2x' - 4y' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 3 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (C') : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

17 Trong mpOxy cho đường thẳng $(a) : 2x - y + 3 = 0$. Tìm ảnh của a qua $Đ_{Ox}$.

Giải : Ta có : $M(x;y) \xmapsto{Đ_{Ox}} M'\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (a) : 2x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(x') - (-y') + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' + 3 = 0 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (a') : 2x + y + 3 = 0$

Vậy : $(a) \xmapsto{Đ_{Oy}} (a') : 2x + y + 3 = 0$

18 Trong mpOxy cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$. Tìm ảnh của a qua $Đ_{Oy}$.

Giải : Ta có : $M(x;y) \xrightarrow{Đ_{Oy}} M' \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (C) : x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow (-x')^2 + y'^2 - 4(y') - 5 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 4y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow M'(x';y') \in (C') :\ x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$

Vậy : $(C) \xrightarrow{Đ_{Oy}} (C') :\ x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$

19 Trong mpOxy cho đthẳng (a) : $2x - y - 3 = 0$, $(\Delta) : x - 3y + 11 = 0$, $(C) : x^2 + y^2 - 10x - 4y + 27 = 0$.

a) Viết biểu thức giải tích của phép đối xứng trục $Đ_a$.

b) Tìm ảnh của điểm $M(4;-1)$ qua $Đ_a$.

c) Tìm ảnh : $(\Delta') = Đ_a(\Delta), (C') = Đ_a(C)$.

Giải

a) Tổng quát (a) : Ax + By + C=0 , $A^2 + B^2 \neq 0$

Gọi $M(x;y) \xrightarrow{Đ_a} M'(x';y')$, ta có : $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y)$ cùng phương VTPT $\vec{n} = (A;B) \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = t\vec{n}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' - x = At \\ y' - y = Bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + At \\ y' = y + Bt \end{cases} (\forall t \in \mathbb{R})$. Gọi I là trung điểm của MM′ nên $I(\frac{x+x'}{2};\frac{y+y'}{2}) \in (a)$

$\Leftrightarrow A(\frac{x+x'}{2}) + B(\frac{y+y'}{2}) + C = 0 \Leftrightarrow A(\frac{x+x+At}{2}) + B(\frac{y+y+Bt}{2}) + C = 0$

$\Leftrightarrow (A^2 + B^2)t = -2(Ax + By + C) \Leftrightarrow t = \frac{-2(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}$

$\Rightarrow \left\{ x' = x - \frac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}; y' = y - \frac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2} \right.$

Áp dụng kết quả trên ta có : $\begin{cases} x' = x - \frac{4(2x - y - 3)}{5} \\ y' = y + \frac{2(2x - y - 3)}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{12}{5} \\ y' = \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5} \end{cases}$

b) $M(4;-1) \xrightarrow{Đ_a} M'(-\frac{4}{5};\frac{7}{5})$

c) $\Delta \xrightarrow{Đ_a} \Delta' : 3x + y - 17 = 0$

d) $(C) \xrightarrow{Đ_a} (C') : (x-1)^2 + (y-4)^2 = 2$

20 Trong mpOxy cho đường thẳng $(\Delta) : x - 5y + 7 = 0$ và $(\Delta') : 5x - y - 13 = 0$. Tìm phép đối xứng qua trục biến (Δ) thành (Δ') .

Giải

Vì $\frac{1}{5} \neq \frac{-5}{-1} \Rightarrow (\Delta)$ và (Δ') cắt nhau . Do đó trục đối xứng (a) của phép đối xứng biến (Δ) thành (Δ') chính là đường phân giác của góc tạo bởi (Δ) và (Δ') .

Từ đó suy ra (a) : $\frac{|x - 5y + 7|}{\sqrt{1+25}} = \frac{|5x - y - 13|}{\sqrt{25+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + y - 5 = 0 & (a_1) \\ x - y - 1 = 0 & (a_2) \end{array} \right.$

Vậy có 2 phép đối xứng qua các trục $(\Delta_1) : x + y - 5 = 0$, $(\Delta_2) : x - y - 1 = 0$

21 Qua phép đối xứng trục $Đ_a$:

1. Những tam giác nào biến thành chính nó ?
2. Những đường tròn nào biến thành chính nó ?

HD :

1. Tam giác có 1 đỉnh $\in$ trục a , hai đỉnh còn lại đối xứng qua trục a .
2. Đường tròn có tâm $\in$ a .

22 Tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ qua phép đối xứng trục Oy.

PP : Dùng biểu thức toạ độ $\rightarrow$ ĐS : (C′) : $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

23 Hai ΔABC và $\Delta A'B'C'$ cùng nằm trong mặt phẳng toạ độ và đối xứng nhau qua trục Oy .
Biết $A(-1;5), B(-4;6), C'(3;1)$. Hãy tìm toạ độ các đỉnh A', B' và C .

ĐS : $A'(1;5)$, $B'(4;6)$ và $C(-3;1)$

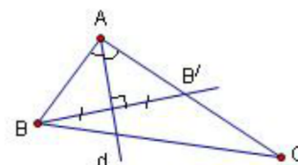
24 Xét các hình vuông , ngũ giác đều và lục giác đều . Cho biết số trục đối xứng tương ứng của mỗi loại đa giác đều đó và chỉ ra cách vẽ các trục đối xứng đó .

ĐS :

- Hình vuông có 4 trục đối xứng , đó là các đường thẳng đi qua 2 đỉnh đối diện và các đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện .
- Ngũ giác đều có 5 trục đối xứng ,đó là các đường thẳng đi qua đỉnh đối diện và tâm của ngũ giác đều .
- Lục giác đều có 6 trục đối xứng , đó là các đường thẳng đi qua 2 đỉnh đối diện và các đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện .

25 Gọi d là phân giác trong tại A của ΔABC , B' là ảnh của B qua phép đối xứng trục $Đ_d$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A. Nếu AB < AC thì B' ở trên cạnh AC .
B. B' là trung điểm cạnh AC .
C. Nếu AB = AC thì $B' \equiv C$.
D. Nếu B' là trung điểm cạnh AC thì AC = 2AB .



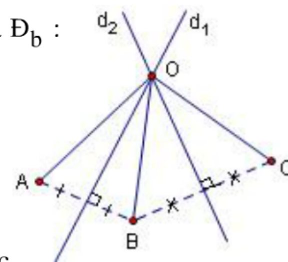
ĐS : Nếu $B' = Đ_d(B)$ thì $B' \in AC$.

- A đúng . Vì AB < AC mà $AB' = AB$ nên $AB' < AC \Rightarrow B'$ ở trên cạnh AC .
- B sai . Vì giả thiết bài toán không đủ khẳng định $AB = \frac{1}{2}AC$.
- C đúng . Vì $AB' = AB$ mà AB = AC nên $AB' = AC \Rightarrow B' \equiv C$.
- D đúng . Vì Nếu B' là trung điểm cạnh AC thì AC=2AB′ mà AB′=AB nên AC=2AB .

26 Cho 2 đường thẳng a và b cắt nhau tại O . Xét 2 phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$:

$A \xmapsto{Đ_a} B \xmapsto{Đ_b} C$. Khẳng định nào sau đây không sai ?

A. A,B,C $\in$ đường tròn (O, R = OC) .
B. Tứ giác OABC nội tiếp .
C. ΔABC cân ở B
D. ΔABC vuông ở B



HD : A. Không sai . Vì d_1 là trung trực của AB $\Rightarrow$ OA = OB , d_2 là trung trực của BC $\Rightarrow$ OB = OC $\Rightarrow$ OA = OB = OC $\Rightarrow$ A,B,C $\in$ đường tròn (O, R = OC) .

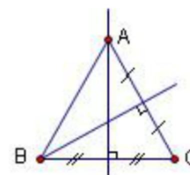
Các câu B,C,D có thể sai .

27 Cho ΔABC có hai trục đối xứng . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. ΔABC là Δ vuông B. ΔABC là Δ vuông cân C. ΔABC là Δ đều D. ΔABC là Δ cân .

HD : Gỉa sử ΔABC có 2trục đối xứng là AC và BC

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ BC = BA \end{cases} \Rightarrow AB = AB = BC \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều .}$$



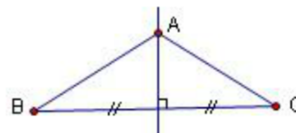
28 Cho ΔABC có $\hat{A} = 110^o$. Tính $\hat{B}$ và $\hat{C}$ để ΔABC có trục đối xứng .

A. $\hat{B} = 50^o$ và $\hat{C} = 20^o$ B. $\hat{B} = 45^o$ và $\hat{C} = 25^o$ C. $\hat{B} = 40^o$ và $\hat{C} = 30^o$ D. $\hat{B} = \hat{C} = 35^o$

HD : Chọn D . Vì : ΔABC có trục đối xứng khi ΔABC cân hoặc đều

Vì $\hat{A} = 110^o > 90^o \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A , khi đó :

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^o - \hat{A}}{2} = \frac{180^o - 110^o}{2} = 35^o$$



29 Trong các hình sau , hình nào có nhiều trục đối xứng nhất ?

A. Hình chữ nhật B. Hình vuông C. Hình thoi D. Hình thang cân .

ĐS : Chọn B. Vì : Hình vuông có 4 trục đối xứng .

30 Trong các hình sau , hình nào có ít trục đối xứng nhất ?

A. Hình chữ nhật B. Hình vuông C. Hình thoi D. Hình thang cân .

ĐS : Chọn D. Vì : Hình thang cân có 1 trục đối xứng .

31 Trong các hình sau , hình nào có 3 trục đối xứng ?

A. Hình thoi B. Hình vuông C. Δ đều D. Δ vuông cân .

ĐS : Chọn C. Vì : Δ đều có 3 trục đối xứng .

32 Trong các hình sau , hình nào có nhiều hơn 4 trục đối xứng ?

A. Hình vuông B. Hình thoi C. Hình tròn D. Hình thang cân .

ĐS : Chọn C. Vì : Hình tròn có vô số trục đối xứng .

33 Trong các hình sau , hình nào không có trục đối xứng ?

A. Hình bình hành B. Δ đều C. Δ cân D. Hình thoi .

ĐS : Chọn A. Vì : Hình bình hành không có trục đối xứng .

34 Cho hai hình vuông ABCD và $AB'C'D'$ có cạnh đều bằng a và có đỉnh A chung .

Chứng minh : Có thể thực hiện một phép đối xứng trục biến hình vuông ABCD thành $AB'C'D'$.

HD : Gỉa sử : $BC \cap B'C' = E$.

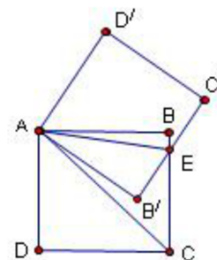
Ta có : $AB = AB'$, $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$, AE chung .

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta AB'F \Rightarrow \begin{cases} EB = EB' \\ \text{biết } AB = AB' \end{cases} \Rightarrow B \xrightarrow{Đ_{AE}} B'$

Mặt khác : $\begin{cases} EC = EC' \\ AC = AC' = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C \xrightarrow{Đ_{AE}} C'$

Ngoài ra : $AD' = AD$ và $\widehat{D'AE} = \widehat{DAE} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{BAB'}}{2}$

$\Rightarrow D \xrightarrow{Đ_{A}} D' \Rightarrow ABCD \xrightarrow{Đ_{AE}} AB'C'D'$



35 Gọi H là trực tâm ΔABC . CMR : Bốn tam giác ABC , HBC , HAC , HAC có đường tròn ngoại tiếp bằng nhau .

HD :

Ta có : $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$ (cùng chắn cung $\widehat{BK}$)

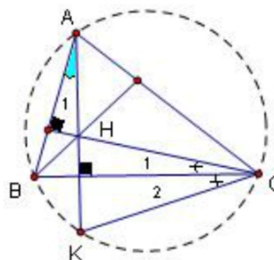
$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (góc có cạnh tương ứng $\perp$) $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$

$\Rightarrow \Delta CHK$ cân $\Rightarrow$ K đối xứng với H qua BC .

Xét phép đối xứng trục BC .

Ta có : $K \xrightarrow{Đ_{BC}} H$; $B \xrightarrow{Đ_{BC}} B$; $C \xrightarrow{Đ_{BC}} C$

Vậy : Đường tròn ngoại tiếp $\Delta KBC \xrightarrow{Đ_{BC}}$ Đường tròn ngoại tiếp ΔHBC

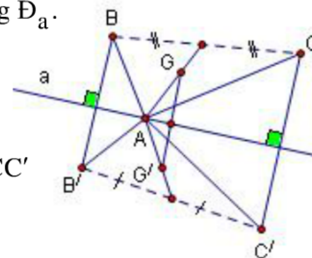


36 Cho ΔABC và đường thẳng a đi qua đỉnh A nhưng không đi qua B,C .

a) Tìm ảnh ΔABC qua phép đối xứng $Đ_a$.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC , Xác định G' là ảnh của G qua phép đối xứng $Đ_a$.

Giải



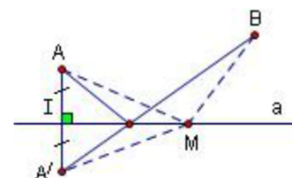
a) Vì a là trục của phép đối xứng $Đ_a$ nên :

$A \in a \Rightarrow A = Đ_a(A)$.

$B,C \notin a$ nên $Đ_a : B \longmapsto B', C \longmapsto C'$ sao cho a là trung trực của BB',CC'

b) Vì $G \notin a$ nên $Đ_a : G \longmapsto G'$ sao cho a là trung trực của GG' .

37 Cho đường thẳng a và hai điểm A,B nằm cùng phía đối với a . Tìm trên đường thẳng a điểm M sao cho MA+MB ngắn nhất .



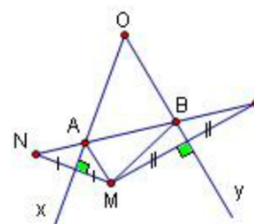
Giải : Xét phép đối xứng $Đ_a : A \longmapsto A'$.

$\forall M \in a$ thì $MA = MA'$. Ta có : $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$

Để MA + MB ngắn nhất thì chọn M,A,B thẳng hàng

Vậy : M là giao điểm của a và $A'B$.

38 (SGK-P13)) Cho góc nhọn xOy và M là một điểm bên trong góc đó . Hãy tìm điểm A trên Ox và điểm B trên Oy sao cho ΔMBA có chu vi nhỏ nhất .



Giải

Gọi $N = Đ_{Ox}(M)$ và $P = Đ_{Ox}(M)$. Khi đó : AM=AN , BM=BP

Từ đó : CVi = MA+AB+MB = NA+AB+BP $\geq$ NP

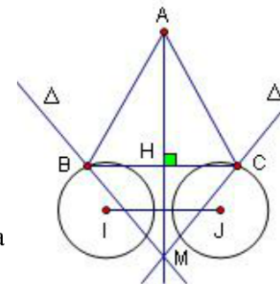
(đường gấp khúc $\geq$ đường thẳng)

MinCVi = NP Khi A,B lần lượt là giao điểm của NP với Ox,Oy .

39 Cho ΔABC cân tại A với đường cao AH . Biết A và H cố định . Tìm tập hợp điểm C trong mỗi trường hợp sau :

a) B di động trên đường thẳng Δ .

b) B di động trên đường tròn tâm I, bán kính R .



Giải

a) Vì : $C = Đ_{AH}(B)$, mà $B \in \Delta$ nên $C \in \Delta'$ với $\Delta' = Đ_{AH}(\Delta)$

Vậy : Tập hợp các điểm C là đường thẳng Δ'

b) Tương tự : Tập hợp các điểm C là đường tròn tâm J , bán kính R là ảnh của đường tròn (I) qua $Đ_{AH}$.

Vấn đề 4 : PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 ĐN : Phép đối xứng tâm I là một phép dời hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua I.

Phép đối xứng qua một điểm còn gọi là phép đối tâm .

Điểm I gọi là tâm của của phép đối xứng hay đơn giản là tâm đối xứng .

Kí hiệu : $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

- Nếu $M \equiv I$ thì $M' \equiv I$
- Nếu $M \neq I$ thì $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow$ I là trung trực của MM'.
- ĐN :Điểm I là tâm đối xứng của hình H $\Leftrightarrow Đ_I(H) = H$.

Chú ý : Một hình có thể không có tâm đối xứng .

2 Biểu thức tọa độ : Cho $I(x_o;y_o)$ và phép đối xứng tâm I : $M(x;y)\xrightarrow{Đ_I}M'=Đ_I(M)=(x';y')$ thì
$\begin{cases}x'=2x_o-x\\y'=2y_o-y\end{cases}$

3 Tính chất :
1. Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì .
2. Biến một tia thành tia .
3. Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng .
4. Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .
5. Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho .
6. Biến một góc thành góc có số đo bằng nó .
7. Biến tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\to$ trực tâm , trọng tâm $\to$ trọng tâm)
8. Đường tròn thành đường tròn bằng nó . (Tâm biến thành tâm : $I\longmapsto I'$, $R'=R$)

B . BÀI TẬP

1 Tìm ảnh của các điểm sau qua phép đối xứng tâm I :
1) $A(-2;3)$, $I(1;2)$ $\Rightarrow A'(4;1)$
2) $B(3;1)$, $I(-1;2)$ $\Rightarrow B'(-5;3)$
3) $C(2;4)$, $I(3;1)$ $\Rightarrow C'(4;-2)$

Giải :

a) Gỉa sử : $A'=Đ_I(A)\Leftrightarrow \overrightarrow{IA'}=-\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow(x'-1;y'-2)=-(-3;1)\Leftrightarrow\begin{cases}x'-1=3\\y'-2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=4\\y'=1\end{cases}\Rightarrow A'(4;1)$

Cách $\neq$: Dùng biểu thức toạ độ

2 Tìm ảnh của các đường thẳng sau qua phép đối xứng tâm I :
1) $(\Delta):x+2y+5=0, I(2;-1)$ $\Rightarrow(\Delta'):x+2y-5=0$
2) $(\Delta):x-2y-3=0, I(1;0)$ $\Rightarrow(\Delta'):x-2y+1=0$
3) $(\Delta):3x+2y-1=0, I(2;-3)$ $\Rightarrow(\Delta'):3x+2y+1=0$

Giải

PP : Có 3 cách

Cách 1 : Dùng biểu thức toạ độ

Cách 2 : Xác định dạng $\Delta'//\Delta$, rồi dùng công thức tính khoảng cách $d(\Delta;\Delta')\to\Delta'$.

Cách 3 : Lấy bất kỳ $A,B\in\Delta$, rồi tìm ảnh $A',B'\in\Delta'\Rightarrow\Delta'\equiv A'B'$

1) Cách 1 : Ta có : $M(x;y)\xrightarrow{Đ_I}M'\begin{cases}x'=4-x\\y'=-2-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-x'\\y=-2-y'\end{cases}$

Vì $M(x;y)\in\Delta\Leftrightarrow x+2y+5=0\Leftrightarrow(4-x')+2(-2-y')+5=0\Leftrightarrow x'+2y'-5=0$
$\Leftrightarrow M'(x';y')\in\Delta':x+2y-5=0$

Vậy : $(\Delta)\xrightarrow{Đ_I}(\Delta'):x+2y-5=0$

Cách 2 : Gọi $\Delta'=Đ_I(\Delta)\Rightarrow\Delta'$ song song $\Delta\Rightarrow\Delta'$: $x+2y+m=0$ $(m\neq5)$.

Theo đề : $d(I;\Delta)=d(I;\Delta')\Leftrightarrow\dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|m|}{\sqrt{1^2+2^2}}\Leftrightarrow5=|-m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\text{ (loại)}\\m=-5\end{array}\right.$
$\to(\Delta'):x+2y-5=0$

Cách 3 : Lấy : $A(-5;0),B(-1;-2)\in\Delta\Rightarrow A'(9;-2),B'(5;0)\Rightarrow\Delta'\equiv A'B':x+2y-5=0$

3 Tìm ảnh của các đường tròn sau qua phép đối xứng tâm I :

1) $(C): x^2 + (y-2)^2 = 1, E(2;1)$ $\Rightarrow (C'): (x-4)^2 + y^2 = 1$

2) $(C): x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0, F(1;0)$ $\Rightarrow (C'): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

3) $(P): y = 2x^2 - x + 3$, tâm O(0;0) . $\xrightarrow{\text{đ / nghiã hay biểu thức toạ độ}} (P'): y = -2x^2 - x - 3$

HD : 1) Có 2 cách giải :

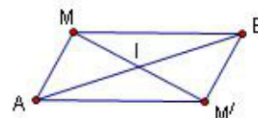
Cách 1 : Dùng biểu thức toạ độ .

Cách 2 : Tìm tâm $I \xmapsto{Đ_E} I', R' = R$ = (đã cho) .

2) Tương tự .

4 Cho hai điểm A và B .Cho biết phép biến đổi M thành M′ sao cho AMBM′ là một hình bình hành .

HD :



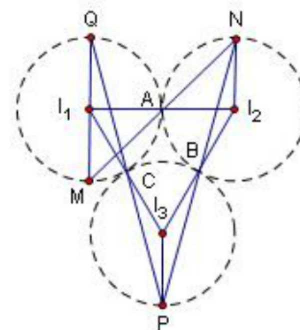
Nếu AMBM′ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM'} \\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM'} \end{cases}$

Vì : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ (1)

Gọi I là trung điểm của AB . Ta có : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

Từ (1) $\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM'} \Leftrightarrow M' = Đ_I(M)$.



5 Cho ba đường tròn bằng nhau $(I_1;R),(I_2;R),(I_3;R)$ từng đôi tiếp xúc nhau tại A,B,C . Gỉa sử M là một điểm trên $(I_1;R)$, ngoài ra :

$M \xmapsto{Đ_A} N$; $N \xmapsto{Đ_B} P$; $P \xmapsto{Đ_C} Q$. CMR : $M \xmapsto{Đ_{I_1}} Q$.

HD :

- Do $(I_1;R)$ tiếp xúc với $(I_2;R)$ tại A , nên :

$M \xmapsto{Đ_A} N ; I_1 \xmapsto{Đ_A} I_2 \Rightarrow MI_1 \xmapsto{Đ_A} NI_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI_1} = -\overrightarrow{NI_2}$ (1)

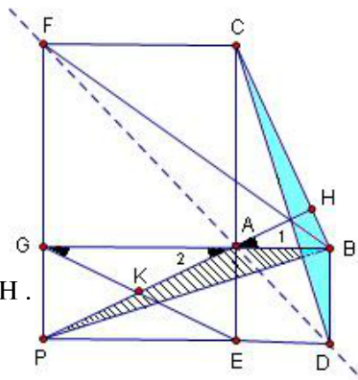
- Do $(I_2;R)$ tiếp xúc với $(I_3;R)$ tại B , nên :

$N \xmapsto{Đ_B} P ; I_2 \xmapsto{Đ_B} I_3 \Rightarrow NI_2 \xmapsto{Đ_B} PI_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{NI_2} = -\overrightarrow{PI_3}$ (2)

- Do $(I_3;R)$ tiếp xúc với $(I_1;R)$ tại C , nên :

$P \xmapsto{Đ_C} Q ; I_3 \xmapsto{Đ_C} I_1 \Rightarrow PI_3 \xmapsto{Đ_C} QI_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{PI_3} = -\overrightarrow{QI_1}$ (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra : $\overrightarrow{MI_1} = -\overrightarrow{QI_1} \Leftrightarrow M = Đ_{I_1}(Q)$.



5 Cho ΔABC là tam giác vuông tại A . Kẻ đường cao AH . Vẽ phía ngoài tam giác hai hình vuông ABDE và ACFG .

a) Chứng minh tập hợp 6 điểm $\{B,C,F,G,E,D\}$ có một trục đối xứng .

b) Gọi K là trung điểm của EG . Chứng minh K ở trên đường thẳng AH .

c) Gọi $P = DE \cap FG$. Chứng minh P ở trên đường thẳng AH .

d) Chứng minh : $CD \perp BP$, $BF \perp CP$.

e) Chứng minh : AH,CD,BF đồng qui .

HD :

a) Do : $\widehat{BAD} = 45^\circ$ và $\widehat{CAF} = 45^\circ$ nên ba điểm D,A,F thẳng hàng .

- Ta có : $A \xmapsto{Đ_{DF}} A$; $D \xmapsto{Đ_{DF}} D$; $F \xmapsto{Đ_{DF}} F$; $C \xmapsto{Đ_{DF}} G$;

  $B \xmapsto{Đ_{DF}} E$ (Tính chất hình vuông).

  Vậy : Tập hợp 6 điểm $\{B,C,F,G,E,D\}$ có trục đối xứng chính là đường thẳng DAF .

b) Qua phép đối xứng trục DAF ta có : $\Delta ABC = \Delta AEG$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{AEG}$.

Nhưng : $\widehat{BCA} = \widehat{AGE}$ (2 Δ đối xứng =)

$\widehat{AGE} = \widehat{A_2}$ (do ΔKAG cân tại K) . Suy ra : $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow$ K,A,H thẳng hàng $\Rightarrow$ K ở trên AH .

c) Tứ giác AFPG là một hình chữ nhật nên : A,K,P thẳng hàng . (Hơn nữa K là trung điểm của AP)

Vậy : P ở trên PH .

d) • Do $\Delta EDC = \Delta DBP$ nên DC = BP .

- Ta có : $\begin{cases} DC = BP \\ DB = AB \\ BC = AP \end{cases} \Rightarrow \Delta BDC = \Delta ABP \Rightarrow CD = BP \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{APB}$ nhưng hai góc này có cặp

  cạnh : $BC \perp AP \Rightarrow$ cặp cạnh còn lại : $DC \perp BP$.

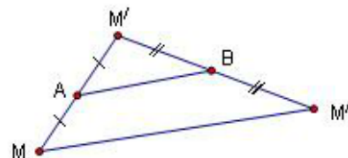
  Lý luận tương tự , ta có : $BF \perp CP$.

e) Ta có : ΔBCP . Các đường thẳng AH, CD và BF chính là ba đường cao của ΔBCP nên đồng qui .

6 Cho hai điểm A và B và gọi $Đ_A$ và $Đ_B$ lần lượt là hai phép đối xứng tâm A và B .

a) CMR : $Đ_B \circ Đ_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$.

b) Xác định $Đ_A \circ Đ_B$.



HD : a) ◆ Gọi M là một điểm bất kỳ , ta có :

$M \xmapsto{Đ_A} M' : \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM'}$

$M' \xmapsto{Đ_B} M'' : \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM''}$. Nghĩa là : $M'' = Đ_B \circ Đ_A(M), \forall M$ (1)

◆ Ta chứng minh : $M \xmapsto{Đ_B \circ Đ_A} M''$:

Biết : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$

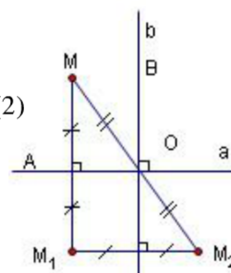
Mà : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'B}$

Vậy : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{M'B} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{AB}$

Vì : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM'}$ nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M'A} = \vec{0}$. Suy ra : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow M'' = T_{2\overrightarrow{AB}}(M), \forall M$ (2)

Từ (1) và (2) , suy ra : $Đ_B \circ Đ_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$.

b) Chứng minh tương tự : $Đ_A \circ Đ_B = T_{2\overrightarrow{BA}}$.



7 Chứng minh rằng nếu hình (H) có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì (H) có tâm đối xứng .

HD : Dùng hình thoi

Gỉa sử hình (H) có hai trục đối xứng vuông góc với nhau .

Lấy điểm M bất kỳ thuộc (H) và $M_1 = Đ_a(M)$, $M_2 = Đ_b(M_1)$. Khi đó , theo định nghĩa $M_1, M_2 \in (H)$.

Gọi $O = a \cap b$, ta có : $OM = OM_1$ và $\widehat{MOM_1} = 2\widehat{AOM_1}$

$OM_1 = OM_2$ và $\widehat{M_1OM_2} = 2\widehat{M_1OB}$

Suy ra : $OM = OM_2$ và $\widehat{MOM_1} + \widehat{M_1OM_2} = 2(\widehat{AOM_1} + \widehat{M_1OB})$

hay $\widehat{MOM_1} = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$

Vậy : O là trung điểm của M và M_2 .

Do đó : $M_2 = Đ_O(M), \forall M \in (H), M_2 \in (H) \Leftrightarrow$ O là tâm đối xứng của (H) .

8 Cho ΔABC có AM và CN là các trung tuyến . CMR : Nếu $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^\circ$ thì ΔABC đều .

HD :

Tứ giác ACMN có $\widehat{NAM} = \widehat{NCM} = 30^\circ$ nên nội tiếp đtròn tâm O, bkính R=AC và $\widehat{MON} = 2\widehat{NAM} = 60^\circ$.

Xét : $A \xmapsto{Đ_N} B \Rightarrow (O) \xmapsto{Đ_N} (O_1)$ thì $B \in (O_1)$ vì $A \in (O)$.

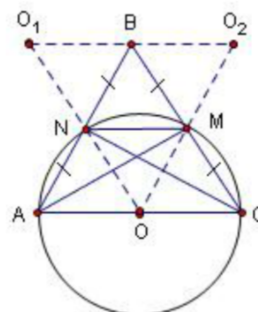
$C \xmapsto{Đ_M} B \Rightarrow (O) \xmapsto{Đ_M} (O_2)$ thì $B \in (O_2)$ vì $C \in (O)$.

Khi đó , ta có : $\begin{cases} OO_1 = OO_2 = 2R \\ \widehat{MON} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta OO_1O_2$ là tam giác đều .

Vì $O_1B + O_2B = R + R = 2R = O_1O_2$ nên B là trung điểm O_1O_2.

Suy ra :$\Delta ABC \sim \Delta OO_1O_2$ (Vì cùng đồng dạng với ΔBMN) .

Vì ΔOO_1O_2 là tam giác đều nên ΔABC là tam giác đều .



Vấn đề 5 : PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 ĐN : Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và góc lượng giác φ. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M′ sao cho OM = OM′ và (OM;OM′) = φ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ.

- Phép quay hoàn toàn xác định khi biết tâm và góc quay
- Kí hiệu : Q_O^{φ} .

Chú ý : Chiều dương của phép quay $\equiv$ chiều dương của đường tròn lượng giác .

- $Q^{2k\pi} \equiv$ phép đồng nhất $, \forall k \in \mathbb{Z}$
- $Q^{(2k+1)\pi} \equiv$ phép đối xứng tâm I $, \forall k \in \mathbb{Z}$

2 Tính chất :

- ĐL : Phép quay là một phép dời hình .
- HQ :

1. Phép quay biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng .
2. Đường thẳng thành đường thẳng .
3. Tia thành tia .
4. Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó .
5. Tam giác thành tam giác bằng nó . (Trực tâm $\xmapsto{Q}$ trực tâm , trọng tâm $\xmapsto{Q}$ trọng tâm)
6. Đường tròn thành đường tròn bằng nó . (Tâm biến thành tâm : $I \xmapsto{Q_{(O\,;\,\varphi)}} I'$, $R' = R$)
7. Góc thành góc bằng nó .

B. BÀI TẬP

1 Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(x;y) . Tìm $M' = Q_{(O\,;\,\varphi)}(M)$.

HD :

Gọi M(x;y) . Đặt : OM = r , góc lượng giác (Ox;OM) = α thì $M\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$

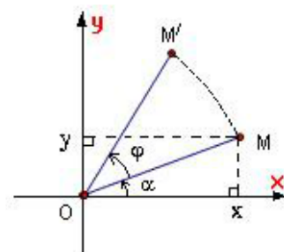
Vì : $M \xmapsto{Q_{(O\,;\,\varphi)}} M'$. Gọi $M'(x';y')$ thì độ dài $OM' = r$ và $(Ox;OM') = \alpha + \varphi$.

Ta có :

$x' = r\cos(\alpha + \varphi) = a\cos\alpha.\cos\varphi - a\sin\alpha.\sin\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi$.

$y' = r\sin(\alpha + \varphi) = a\sin\alpha.\cos\varphi + a\cos\alpha.\sin\varphi = x\sin\varphi + y\cos\varphi$.

Vậy : $M'\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$



Đặc biệt :

- $M \xmapsto{Q_{(O\,;\,-\varphi)}} M''\begin{cases} x'' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y'' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$
- $M \xmapsto[I(x_o;y_o)]{Q_{(I\,;\,\varphi)}} M'\begin{cases} x' - x_o = (x - x_o)\cos\varphi - (y - y_o)\sin\varphi \\ y' - y_o = (x - x_o)\sin\varphi + (y - y_o)\cos\varphi \end{cases}$
- $M \xmapsto[I(x_o;y_o)]{Q_{(I\,;\,-\varphi)}} M''\begin{cases} x'' - x_o = (x - x_o)\cos\varphi - (y - y_o)\sin\varphi \\ y'' - y_o = -(x - x_o)\sin\varphi + (y - y_o)\cos\varphi \end{cases}$

2 Trong mpOxy cho phép quay $Q_{(O;45^\circ)}$. Tìm ảnh của :

a) Điểm M(2;2) b) Đường tròn (C) : $(x-1)^2 + y^2 = 4$

Giải . Gọi : $M(x;y) \xmapsto{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} M'(x';y')$. Ta có : $OM = 2\sqrt{2}$, (Ox; OM) = α

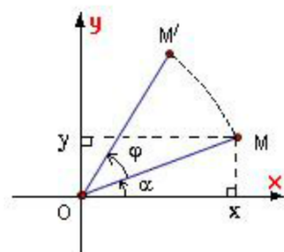
Thì $M'\begin{cases} x' = r\cos(\alpha + 45^\circ) = r\cos\alpha.\cos45^\circ - r\sin\alpha.\sin45^\circ = x.\cos45^\circ - y.\sin45^\circ \\ y' = r\sin(\alpha + 45^\circ) = r\sin\alpha.\cos45^\circ + r\cos\alpha.\sin45^\circ = y.\cos45^\circ + x.\sin45^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow M'\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

a) $A(2;2) \xmapsto{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} A'(0\,;2\sqrt{2})$

b) Vì (C) : $\begin{cases} \text{Tâm } I(1;0) \\ \text{Bk : } R = 2 \end{cases} \xrightarrow{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} (C') : \begin{cases} \text{Tâm } I'? \\ \text{Bk : } R' = R = 2 \end{cases}$

$I(1;0) \xmapsto{Q_{(O\,;\,45^\circ)}} I'(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. Vậy : $(C') : (x - \dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = 4$



3 Trong mpOxy cho phép biến hình f : $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$. Hỏi f là phép gì ?

Giải

Ta có $f: M(x;y) \longmapsto M'(x';y')$ với $\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{3} - y\sin\frac{\pi}{3} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{3} + y\cos\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$ f là phép quay $Q_{(O;\frac{\pi}{3})}$

4 Trong mpOxy cho đường thẳng $(\Delta): 2x - y + 1 = 0$. Tìm ảnh của đường thẳng qua :
a) Phép đối xứng tâm $I(1;-2)$. b) Phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$.

Giải

a) Ta có : $M'(x';y') = Đ_I(M)$ thì biểu thức tọa độ $M'\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -4 - y' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in (\Delta): 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(2 - x') - (-4 - y') + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x' + y' + 9 = 0$
$\Leftrightarrow M'(x';y') \in (\Delta'): 2x - y - 9 = 0$

Vậy : $(\Delta) \xmapsto{Đ_I} (\Delta'): 2x - y - 9 = 0$

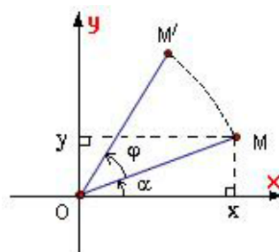
b) Cách 1 : Gọi $M(x;y) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M'(x';y')$. Đặt $(Ox ; OM) = \alpha$, $OM = r$,

Ta có $(Ox ; OM') = \alpha + 90^\circ, OM' = r$.

Khi đó : $M\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M'\begin{cases} x' = r\cos(\alpha + 90^\circ) = -r\sin\alpha = -y \\ y' = r\sin(\alpha + 90^\circ) = r\cos\alpha = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

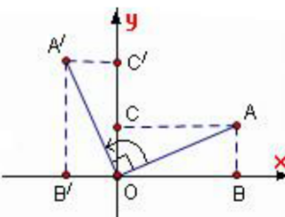
Vì $M(x;y) \in (\Delta): 2(y') - (-x') + 1 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 1 = 0 \Leftrightarrow M'(x';y') \in (\Delta'): x + 2y + 1 = 0$

Vậy : $(\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (\Delta'): x + 2y + 1 = 0$



Cách 2 : Lấy :
- $M(0;1) \in (\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M'(-1;0) \in (\Delta')$
- $N(-\frac{1}{2};0) \in (\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} N'(0;\frac{-1}{2}) \in (\Delta')$
- $(\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (\Delta') \equiv M'N': x + 2y + 1 = 0$

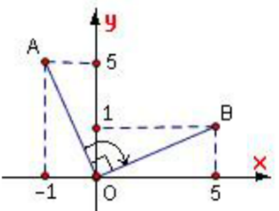
Cách 3 :
- Vì $(\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (\Delta') \Rightarrow (\Delta) \perp (\Delta')$ mà hệ số góc : $k_\Delta = 2 \Rightarrow k_{\Delta'} = -\frac{1}{2}$
- $M(0;1) \in (\Delta) \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M'(1;0) \in (\Delta')$
- $(\Delta'): \begin{cases} \text{Qua } M'(1;0) \\ \text{hsg ; } k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (\Delta'): x + 2y + 1 = 0$



5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $A(3;4)$. Hãy tìm toạ độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90^O.

HD :

Gọi $B(3;0), C(0;4)$ lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox,Oy . Phép quay tâm O góc 90^O biến hình chữ nhật OABC thành hình chữ nhật OC'A'B'. Khi đó : $C'(0;3), B'(-4;0)$. Suy ra : $A'(-4;3)$.



6 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy . Tìm phép quay Q biến điểm A(– 1;5) thành điểm B(5;1) .

HD : Ta có : $\overrightarrow{OA} = (-1;5)$ và $\overrightarrow{OB} = (5;1) \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = \sqrt{26} \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow OA \perp OB \end{cases}$

$\Rightarrow B = Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(A)$.

7 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho điểm M(4;1) . Tìm $N = Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(M)$.

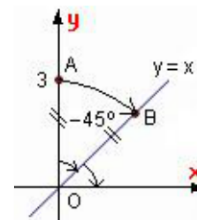
HD :

Vì $N = Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(M) \Rightarrow (OM;ON) = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow 4x+y = 0 \Leftrightarrow y = -4x$ (1)

Do : $OM = ON \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 + 1 = 17$ (2) .

Giải (1) và (2) , ta có : N(1; – 4) hay N(– 1;4) .

- Thử lại : Điều kiện $(OM;ON) = 90^\circ$ ta thấy N(– 1;4) thoả mãn .



8 a)Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho điểm A(0;3) . Tìm $B = Q_{(O\ ;-45^\circ)}(A)$.

HD : Phép quay $Q_{(O\ ;-45^\circ)}$ biến điểm $A \in Oy$ thành điểm $B \in$ đt : y = x, ta có :

$\begin{cases} x_B = y_B > 0 \\ OA = OB = 3 \end{cases}$. Mà $OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = 3 \Rightarrow x_B = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow B(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}})$.

b) Cho A(4;3) . Tìm $B = Q_{(O;60^o)}(A)$ $\longrightarrow B\left(\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$

9 Cho đường tròn (C) : $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Tìm $(C') = Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(C)$.

HD : Tìm ảnh của tâm I : $Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(I) = I'(-2;3) \Rightarrow (C') : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

10 Cho đường tròn (C) : $(x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 5$. Tìm $(C') = Q_{(O\ ;\ 60^\circ)}(C)$.

HD : Tìm ảnh của tâm I : $Q_{(O\ ;\ 60^\circ)}(I) = I'(-2;2\sqrt{3}) \Rightarrow (C') : (x+2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 5$.

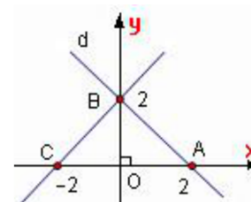
11 Cho đường tròn (C) : $(x-\sqrt{2})^2 + (y-2)^2 = 3$. Tìm $(C') = Q_{(O\ ;\ 45^\circ)}(C)$.

HD : Tìm ảnh của tâm I : $Q_{(O\ ;\ 45^\circ)}(I) = I'(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}) \Rightarrow (C') : (x-1+\sqrt{2})^2 + (y-1-\sqrt{2})^2 = 3$.

12 [CB-P19] Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho điểm A(2;0) và đường thẳng (d) : x + y – 2 = 0. Tìm ảnh của A và (d) qua phép quay $Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}$.

HD :

- Ta có : $A(2;0) \in Ox$. Gọi $B = Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(A)$ thì $B \in Oy$ và OA = OB .
- Vì toạ độ A,B thoả mãn pt (d) : x + y – 2 = 0 nên $A,B \in (d)$.



Do $B = Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(A)$ và tương tự $Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(A) = C(-2;0)$

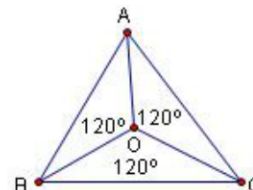
nên $Q_{(O\ ;\ 90^\circ)}(d) = BC \Rightarrow (BC) : \dfrac{x}{x_C} + \dfrac{y}{y_C} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

13 Cho (d) : $x - 3y - 1 = 0$. Tìm $\Delta = Q_{(O\,;\,90^\circ)}(d)$. $\Rightarrow (\Delta) : 3x + y - 1 = 0$

14 Cho (d) : $2x + y - 2 = 0$. Tìm $\Delta = Q_{(O\,;\,60^\circ)}(d)$.

HD : $d \cap Ox = A(1;0)$, $d \cap Oy = B(0;2) \xrightarrow{\text{ảnh}} A'(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}), B'(-\sqrt{3};1)$

$\Rightarrow (\Delta) : (\sqrt{3} - 2)x - (2\sqrt{3} + 1)y + 4 = 0$



15 Cho tam giác đều ABC có tâm O và phép quay $Q_{(O;120^\circ)}$.

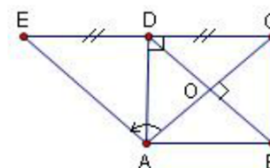
a) Xác định ảnh của các đỉnh A,B,C .

b) Tìm ảnh của ΔABC qua phép quay $Q_{(O;120^\circ)}$

Giải

a) Vì OA = OB = OC và $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$ nên $Q_{(O;120^\circ)} : A \longmapsto B, B \longmapsto C, C \longmapsto A$

b) $Q_{(O;120^\circ)} : \Delta ABC \longrightarrow \Delta ABC$



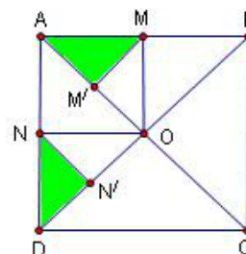
16 [CB-P19] Cho hình vuông ABCD tâm O .

a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay $Q_{(A\,;\,90^\circ)}$.

b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay $Q_{(O\,;\,90^\circ)}$

HD : a) Gọi $E = Q_{(A\,;\,90^\circ)}(C)$ thì AE=AC và $\widehat{CAE} = 90^\circ$ nên ΔAEC vuông cân đỉnh A , có đường cao AD . Do đó : D là trung điểm của EC .

b) Ta có : $Q_{(O\,;\,90^\circ)}(B) = C$ và $Q_{(O\,;\,90^\circ)}(B) = C \Rightarrow Q_{(A\,;\,90^\circ)}(BC) = CD.$

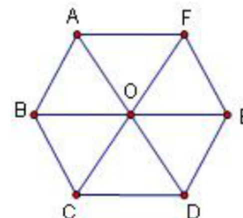


17 Cho hình vuông ABCD tâm O . M là trung điểm của AB , N là trung điểm của OA . Tìm ảnh của ΔAMN qua phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$.

HD : ◆ $Q_{(O;90^\circ)}(A) = D$, $Q_{(O;90^\circ)}(M) = M'$ là trung điểm của AD .

$Q_{(O;90^\circ)}(N) = N'$ là trung điểm của OD . Do đó : $Q_{(O;90^\circ)}(\Delta AMN) = \Delta DM'N'$

18 [CB-1.15] Cho hình lục giác đều ABCDEF , O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó . Tìm ảnh của ΔOAB qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O , góc 60° và phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{OE}}$.



HD :

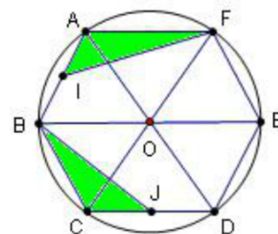
Gọi $F = T_{\overrightarrow{OE}} \circ Q_{(O;60^\circ)}$. Xét :

- $Q_{(O;60^\circ)}(O) = O, Q_{(O;60^\circ)}(A) = B, Q_{(O;60^\circ)}(B) = C$.
- $T_{\overrightarrow{OE}}(O) = E, T_{\overrightarrow{OE}}(B) = O, T_{\overrightarrow{OE}}(C) = D$
- Vậy : F(O) = E , F(A) = O , F(B) = D $\Rightarrow F(\Delta OAB) = \Delta EOD$

19 Cho hình lục giác đều ABCDEF theo chiều dương , O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó . I là trung điểm của AB .

a) Tìm ảnh của ΔAIF qua phép quay $Q_{(O\,;\,120^\circ)}$.

b) Tìm ảnh của ΔAOF qua phép quay $Q_{(E\,;\,60^\circ)}$.



HD :

a) ◆ $Q_{(O\,;\,120^\circ)}$ biến F,A,B lần lượt thành B,C,D , trung điểm I thành trung điểm J của CD nên $Q_{(O\,;\,120^\circ)}(\Delta AIF) = \Delta CJB$.

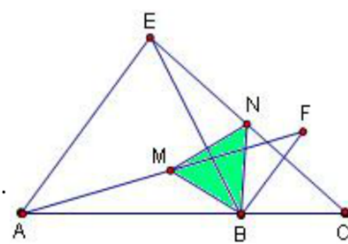
b) ◆ $Q_{(E\,;\,60^\circ)}$ biến A,O,F lần lượt thành C,D,O .

15 Cho ba điểm A,B,C theo thứ tự trên thẳng hàng . Vẽ cùng một phía dựng hai tam giác đều ABE và BCF . Gọi M và N tương ứng là hai trung điểm của AF và CE . Chứng minh rằng : BMN là tam giác đều .

HD :

Xét phép quay $Q_{(B;-60^\circ)}$.Ta có : $Q_{(B;-60^\circ)}(A) = E$, $Q_{(B;-60^\circ)}(F) = C$

$\Rightarrow Q_{(B;-60^\circ)}(AF) = EC$.

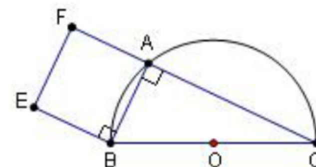


Do M là trung điểm của AF , N là trung điểm của EC , nên :

$Q_{(B;-60^\circ)}(M) = N \Rightarrow BM = BN$ và $\widehat{MBN} = 60^\circ \Rightarrow \Delta BMN$ là tam giác đều .

21 [CB-1.17] Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC . Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó . Dựng về phía ngoài của ΔABC hình vuông ABEF . Chứng minh rằng : E chạy trên nửa đường cố định .

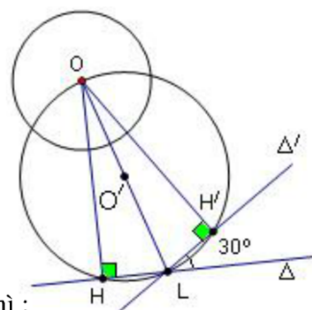
HD : Gọi $E = Q_{(B;90^\circ)}(A)$. Khi A chạy trên nửa đường tròn (O) , E sẽ chạy trên nửa đường tròn $(O') = Q_{(B;90^\circ)}[(O)]$.



22 Cho đường (O;R) và đường thẳng Δ không cắt đường tròn . Hãy dựng ảnh của (Δ) qua phép quay $Q_{(O\,;\,30^\circ)}$.

Giải

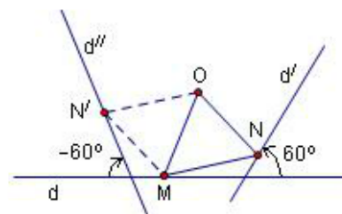
Từ O hạ đường vuông góc OH với Δ . Dựng điểm H′ sao cho $(OH;OH') = 30^\circ$ và OH′ = OH . Dựng đường tròn qua 3 điểm O,H,H′ ; đường tròn này cắt Δ tại điểm L . Khi đó LH′ là đường thẳng phải dựng .



23 Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d , M là điểm di động trên d . Hãy tìm tập hợp các điểm N sao cho ΔOMN đều .

Giải : ΔOMN đều $\Rightarrow OM = ON$ và $\widehat{NOM} = 60^\circ$. Vì vậy khi M chạy trên d thì :

- N chạy trên d′ là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O;60^\circ)}$.
- N chạy trên d″ là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O;-60^\circ)}$

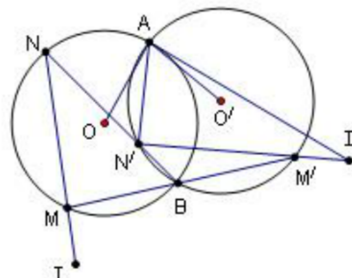


24 Cho hai đường tròn (O) và (O′) bằng nhau và cắt nhau ở A và B . Từ điểm I cố định kẻ cát tuyến di động IMN với (O) , MB và NB cắt (O′) tại M′ và N′. Chứng minh đường thẳng M′N′ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Xét phép quay tâm A , góc quay (AO; AO′) = φ biến (O) thành (O′) .

Vì MM′ và NN′ qua B nên (AO;AO′) = (AM;AM′) = (AN;AN′) .



Qua phép quay Q : $M \longmapsto M'$, $N \longmapsto N'$ và do đó

$MN \xmapsto{Q_{(A;\varphi)}} M'N'$

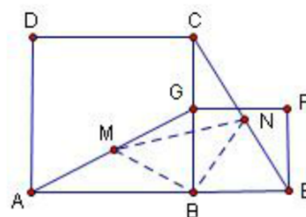
Đường thẳng MN qua điểm cố định I nên đường thẳng M′N′ qua điểm cố định I′ là ảnh của I qua $Q_{(A;\varphi)}$

25 Cho hai hình vuông ABCD và BEFG

a) Tìm ảnh của ΔABG trong phép quay $Q_{(B;-90^\circ)}$.

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AG và CE .

Chứng minh ΔBMN vuông cân .



Giải

a) Vì $\begin{cases} BA = BC \\ (BA;BC) = -90^\circ \end{cases}$ và $\begin{cases} BG = BE \\ (BG;BE) = -90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow Q_{(B;-90^\circ)} : A \longmapsto C, G \longmapsto E \Rightarrow Q_{(B;-90^\circ)} : \Delta ABG \longrightarrow \Delta CBE$

b) $Q_{(B;-90^\circ)} : AG \longrightarrow CE \Rightarrow Q_{(B;-90^\circ)} : M \longmapsto N \Rightarrow BM = BN$ và $(BM;BN) = -90^\circ$

$\Rightarrow$ ΔBMN vuông cân tại B .

26 Cho ΔABC . Qua điểm A dựng hai tam giác vuông cân ABE và ACF . Gọi M là trung điểm của BC và giả sử AM ∩ FE = H . Chứng minh : AH là đường cao của ΔAEF .

HD :

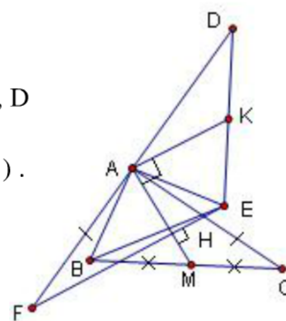
Xét phép quay $Q_{(A;90^\circ)}$: Kéo dài FA một đoạn AD = AF .

Vì AF = AC ⇒ AC = AD nên suy ra : $Q_{(A;90^\circ)}$ biến B , C lần lượt thành E , D

nên gọi trung điểm K của DE thì K= $Q_{(A;90^\circ)}(M) \xrightarrow{\text{Đ/nghĩa}} MA \perp AK$ (1) .

Trong ΔDEF , vì AK là đường trung bình nên AK // FE (2)

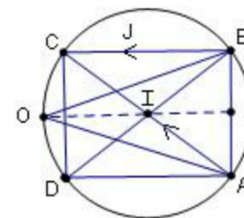
Từ (1),(2) suy ra : AM ⊥ FE ⇒ AH là đường cao của ΔAEF .



27 Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $\sqrt{2}$ và có các đỉnh vẽ theo chiều dương . Các đường chéo cắt nhau tại I. Trên cạnh BC lấy BJ = 1 . Xác định phép biến đổi $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$.

HD : Ta có : $AI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AI = BJ$. Lại có : $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BJ}) = 45^\circ$.

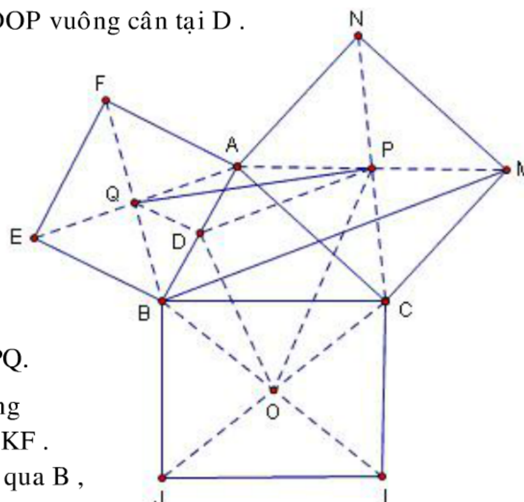
$\Rightarrow BJ = Q_{(O;45^\circ)}(AI)$. Tâm O = ttrực của AB ∩ cung chứa góc 45° đi qua A,B $\Rightarrow \overrightarrow{BJ} = Q_{(O;45^\circ)}(\overrightarrow{AI})$



28 [CB-1.18] Cho ΔABC . Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ,ACMN,ABEF và gọi O,P,Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng .

a) Gọi D là trung điểm của AB . Chứng minh rằng : ΔDOP vuông cân tại D .

b) Chứng minh rằng : $AO \perp PQ$ và $AO = PQ$.



HD :

a) ◆ Vì : $AI = Q_{(C;90^\circ)}(MB) \Rightarrow MB = AI$ và $MB \perp AI$.

Mặt khác : $DP \overset{//}{=} \frac{1}{2}BM$, $DO \overset{//}{=} AI$

$\Rightarrow DP =$ và $\perp DO$ $\Rightarrow \Delta DOP$ vuông cân tại D .

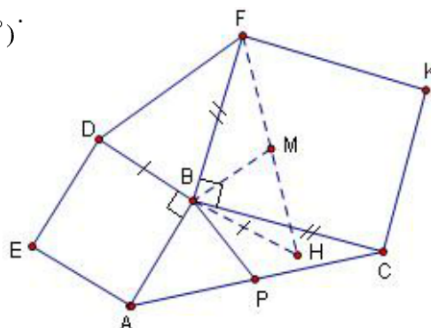
b) Từ câu a) suy ra :

$O \xmapsto{Q_{(D;90^\circ)}} P, A \xmapsto{Q_{(D;90^\circ)}} Q \Rightarrow OA =$ và $\perp PQ$.

29 Cho ΔABC có các đỉnh kí hiệu theo hướng âm . Dựng về phía ngoài tam giác đó các hình vuông ABDE và BCKF . Gọi P là trung điểm của AC , H là điểm đối xứng của D qua B , M là trung điểm của đoạn FH .

a) Xác định ảnh ủa hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BP}$ trong phép quay $Q_{(B;90^\circ)}$.

b) Chứng minh rằng : $DF \perp BP$ và $DF = 2BP$.



HD :

a) Ta có : $\begin{cases} BA = BH \text{ (cùng bằng BD)} \\ (BA;BH) = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow H = Q_B^{90^\circ}(A) \Rightarrow \overrightarrow{BH} = Q_B^{90^\circ}(\overrightarrow{BA})$

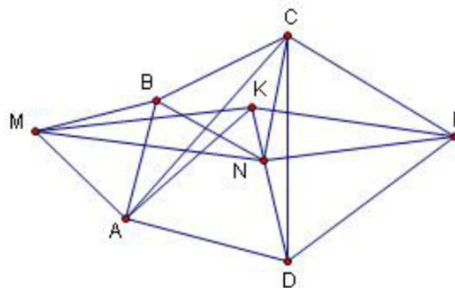
Vì : $Q_B^{90^\circ}(A) = H, Q_B^{90^\circ}(C) = F \Rightarrow Q_B^{90^\circ}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HF}$.

Mà : F là trung điểm của AC , $Q_B^{90^\circ}(F) = M$ là trung điểm của HF . Do đó : $Q_B^{90^\circ}(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BM}$.

b) Vì : $Q_B^{90^\circ}(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BM} \Rightarrow BP = BM, BP \perp BM$.

Mà : $BM = \frac{1}{2}DF$ và BM // DF (Đường trung bình của ΔHDF). Do đó : $BP = \frac{1}{2}DF$, $DF \perp BP$.

30 Cho tứ giác lồi ABCD . Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác đều ABM , CDP . Về phía trong tứ giác, dựng hai tam giác đều BCN và ADK . Chứng minh : MNPK là hình bình hành .



HD : Xét phép quay $Q_B^{60^\circ} : M \longmapsto A$, $N \longmapsto C$

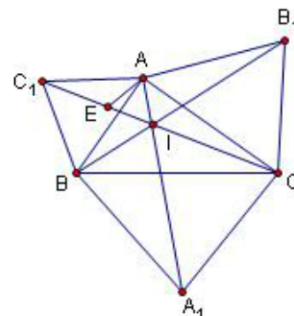
$\Rightarrow MN \xmapsto{Q_{(B;90^\circ)}} AC \Rightarrow MN = AC$ (1)

Xét phép quay $Q_D^{60^\circ} : P \longmapsto C$, $K \longmapsto A$

$\Rightarrow PK \xmapsto{Q_{(D;90^\circ)}} CA \Rightarrow PK = CA$ (2)

Từ (1) , (2) suy ra : MN = PK .

Lí luận , tương tự : MK = PN $\Rightarrow$ MKNP là hình bình hành .



31 Cho ΔABC . Về phía ngoài tam giác , dựng ba tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1 . Chứng minh rằng : AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy .
HD :

Gỉa sử $AA_1 \cap CC_1 = I$. Xét : $A_1 \xmapsto{Q_{(B;60^\circ)}} C, A \xmapsto{Q_{(B;60^\circ)}} C_1$

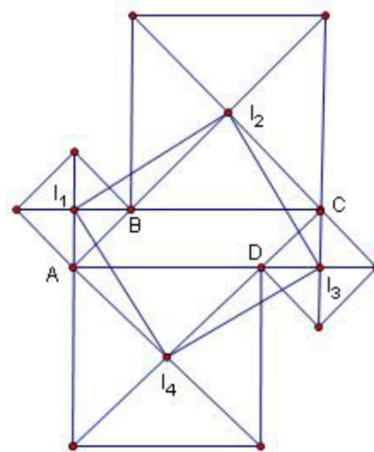
$\Rightarrow A_1A \xmapsto{Q_{(B;60^\circ)}} CC_1 \Rightarrow (A_1A;CC_1) = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIC_1} = 60^\circ$ (1)

Lấy trên CC_1 điểm E sao cho : IE = IA . Vì $\widehat{EIA} = 60^\circ \Rightarrow \Delta EIA$ đều .

Xét : $B \xmapsto{Q_{(A;60^\circ)}} C_1, I \xmapsto{Q_{(A;60^\circ)}} E$, $B_1 \xmapsto{Q_{(A;60^\circ)}} C$

Vì : C_1, B, C thẳng hàng nên B, I, B_1 thẳng hàng

$\Rightarrow$ AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy .



32 Chứng minh rằng các đoạn thẳng nối tâm các hình vuông dựng trên các cạnh của một hình bình hành về phía ngoài , hợp thành một hình vuông .
HD : Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 là tâm của hình vuông cạnh AB,BC,CD,DA .

Dùng phép quay $Q(I;90^\circ) : B \longmapsto C$. Vì $\Delta I_1BA = \Delta I_3CD$

$\Rightarrow CI_3 = BI_1$ và $\widehat{DCI_3} = \widehat{ABI_1} = 45^\circ$. Mà DC // AB $\Rightarrow CI_3 \perp BI_1$

Vậy : $I_3 \xmapsto{Q_{(I;90^\circ)}} I_1 \Rightarrow I_2I_1 = I_2I_3$ và $I_2I_1 \perp I_2I_3$.
Lý luận tương tự , ta có : $I_1I_2I_3I_4$ là một hình vuông .

Vấn đề 6 : HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

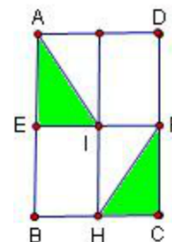
1 ĐL : Nếu ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

2 Tính chất :

1. Nếu thực hiện liên tiếp hai phép dời hình thì được một phép dời hình .
2. Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia .

B. BÀI TẬP

1 Cho hình chữ nhật ABCD . Gọi E,F,H,I theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB,CD,BC,EF. Hãy tìm một phép dời hình biến ΔAEI thành ΔFCH .



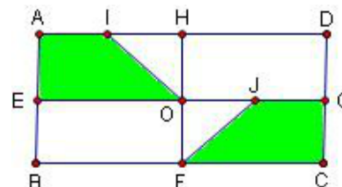
HD :
Thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AE}$ và phép đối xứng qua đường thẳng IH

- $T_{\overrightarrow{AE}} : A \longmapsto E, E \longmapsto B, I \longmapsto H \Rightarrow T_{\overrightarrow{AE}}(\Delta AEI) = \Delta EBH$
- $Đ_{IH} : E \longmapsto F, B \longmapsto C, H \longmapsto H \Rightarrow Đ_{IH}(\Delta EBH) = \Delta FCH$
- $Đ_{IH} : T_{\overrightarrow{AE}}(\Delta AEI) = \Delta FCH$

Do đó : $Đ_{IH} \circ T_{\overrightarrow{AE}}(\Delta AEI) = \Delta FCH \Rightarrow \Delta AEI = \Delta FCH$

2 Cho hình chữ nhật ABCD . Gọi O là tâm đối xứng của nó ; E,F,G,H,I,J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA,AH,OG . Chứng minh rằng : Hai hình thang AJOE và GJFC bằng nhau .

HD :



Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AO}$ biến A,I,O,E lần lượt thành O,J,C,F . Phép đối xứng qua trục của OG biến O,J,C,F lần lượt thành G,J,F,C.

Từ đó suy ra phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên sẽ biến hình thang AJOE thành hình thang GJFC .

Do đó hai hình thang ấy bằng nhau .

3 [CB-1.20] Trong mpOxy , cho $\vec{u} = (3;1)$ và đường thẳng (d) : $2x - y = 0$. Tìm ảnh của (d) qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

HD : PP : $d \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} d' \xmapsto{T_{\vec{u}}} d''$

- Gọi $d' = Q_{(O;90^\circ)}(d)$. Vì tâm $O \in d$ nên $Q_{(O;90^\circ)}(O) = O \in d'$.

  Mặt khác : $d' \perp d \Rightarrow d' : x + 2y + C = 0\ (C \neq 0)$ mà d′ qua O nên C = 0 $\Rightarrow d' : x + 2y = 0$

  Cách khác : Chọn $M(1;2) \in d \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} M' \in d'$.

  Ta có : $M'\begin{cases} x' = OM\cos(\alpha + 90^\circ) \\ y' = OM\sin(\alpha + 90^\circ) \end{cases} = \begin{cases} x' = OM\cos\alpha\cos 90^\circ - OM\sin\alpha\sin 90^\circ \\ y' = OM\sin\alpha\cos 90^\circ + OM\cos\alpha\sin 90^\circ \end{cases} = \begin{cases} x' = x\cos 90^\circ - y\sin 90^\circ \\ y' = y\cos 90^\circ + x\sin 90^\circ \end{cases}$

  $= \begin{cases} x' = 1\cos 90^\circ - 2\sin 90^\circ \\ y' = 2\cos 90^\circ + 1\sin 90^\circ \end{cases} = \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow M'(-2;1)$

- Gọi $d'' = T_{\vec{u}}(d') \Rightarrow d'' \parallel d' \Rightarrow d'' : x + 2y + C = 0$.

  Gọi $O' = T_{\vec{u}}(O) \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow O'(3;1)$.

  Vì $d'' \ni O' \Rightarrow 3 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -5 \Rightarrow d'' : x + 2y - 5 = 0$

  Vậy :$T_{\vec{u}} \circ Q_{(O;90^\circ)}(d) = (d') : x + 2y - 5 = 0$

4 Tìm ảnh của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (3;-1)$ và phép $Đ_{Oy}$.

ĐS : (C′) : $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$

5 Tìm ảnh của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$ và phép $Đ_{Ox}$.

HD : (C) có tâm I(3;1) , bk : R = 2 . Khi đó :

$(C) : I(3;1)\ ,\ R = 2 \xmapsto{Q_{(O;90^\circ)}} (C') : I'(-1;3)\ ,\ R = 2 \xmapsto{Đ_{Ox}} (C'') : I''(-1;-3)\ ,\ R = 2$

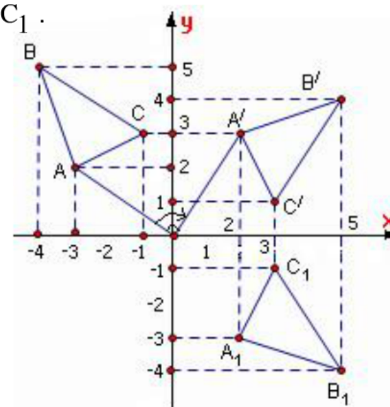
$\Rightarrow (C'') : (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$

6 [CB-P23] Trong mpOxy cho các điểm $A(-3;2), B(-4;5)$ và $C(-1;3)$.

a) Chứng minh rằng : Các điểm $A'(2;3), B'(5;4)$ và $C'(3;1)$ theo thứ tự là ảnh của A,B và C qua $Q_{(O;-90^\circ)}$.

b) Gọi $\Delta A_1B_1C_1$ là ảnh của ΔABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép

$Q_{(O;-90^\circ)}$ và phép đối xứng $Đ_{Ox}$. Tìm toạ độ các đỉnh của $\Delta A_1B_1C_1$.



HD :

a) Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của A trên Ox,Oy thì $M(-3;0), N(0;2)$.

Khi đó : Hình chữ nhật OMAN $\xrightarrow{Q_{(O;-90^\circ)}}$ hcnhật $OM'A'N'$ với $M'(0;3), N'(2;0)$.

Do đó : $A'(2;3) = Q_{(O;-90^\circ)}(A)$.

Ttự : $B'(5;4) = Q_{(O;-90^\circ)}(B), C'(3;1) = Q_{(O;-90^\circ)}(C)$.

Cách khác : Gỉa sử $A \xrightarrow{Q_{(O;-90^\circ)}} A' \Leftrightarrow \Delta AOA'$ vuông cân tại O .

Điều đó đúng vì : $OA = OA' = \sqrt{13},\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0$. Làm tương tự cho B,C ta có điều cần chứng minh .

b) ◆ Phép quay : $Q_{(O;-90^\circ)}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$, $Đ_{Ox}(\Delta A'B'C') = \Delta A_1B_1C_1$

Khi đó : $\begin{cases} x_{A_1} = x_{A'} = 2 \\ y_{A_1} = y_{A'} = -3 \end{cases} \Rightarrow A_1(2;-3)$.Ttự : $B_1(5;-4), C_1(3;-1)$.

7 Trong mpOxy , cho hai parabol : $(P_1): y = 2x^2$, $(P_2): y = 2x^2 - 4x - 1$. Khẳng định nào sau đây sai ?

A) $y = 2x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow y = 2(x-1)^2 - 3$

B) Tịnh tiến sang trái 1 đơn vị rồi xuống dưới 3 đơn vị ta được (P_2).

C) (P_1) và (P_2) bằng nhau .

D) Phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (1;-3)$ biến (P_1) thành (P_2) .

ĐS : B)

8 Trong mpOxy , cho 4 điểm $A(2;0), B(4;4), C(0;2)$ và $D(-4;4)$.
Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Các $\Delta OAC, \Delta OBD$ là các tam giác vuông cân .

B) Phép quay : $\Delta OAB \xrightarrow{Q_{(O;90^\circ)}} \Delta OCD$.

C) ΔOAB và ΔOCD là hai hình bằng nhau .

D) Tồn tại một phép tịnh tiến biến A thành B và C thành D .

ĐS : D)

9 Trong mpOxy cho ΔABC với $A(-3;0), B(0;3), C(2;4)$. Phép biến hình f biến A thành $A'(-;3)$, B thành $B'(2;6)$,C thành $C'(4;7)$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A) f là phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$.

B) f là phép đối xứng tâm $I(-1;\frac{3}{2})$.

C) f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2;3)$.

D) f là phép đối xứng trục .

ĐS : C)

Vấn đề 7 : PHÉP VỊ TỰ

1 ĐN : Cho điểm I cố đinh và một số $k \neq 0$. Phép vị tự tâm I tỉ số k .

Kí hiệu : V_I^k, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M′ sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

2 Biểu thức tọa độ : Cho $I(x_o;y_o)$ và phép vị tự V_I^k .

$$M(x;y) \xrightarrow{V_I^k} M' = V_I^k(M) = (x';y') \text{ thì } \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_o \\ y' = ky + (1-k)y_o \end{cases}$$

3 Tính chất :

1. $M' = V_I^k(M)$, $N' = V_I^k(N)$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, $M'N' = |k|.MN$
2. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm tương ứng .
3. Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho .
4. Biến một tia thành tia .
5. Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên |k| .
6. Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó .
7. Đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = |k|.R$.
8. Biến góc thành góc bằng nó .

B . BÀI TẬP

1 Tìm ảnh của các điểm sau qua phép vị tự tâm I , tỉ số $k \neq 0$:

a) $A(1;2)$, $I(3;-1)$, $k = 2$. $\rightarrow A'(-1;5)$

b) $B(2;-3), I(-1;-2), k = -3$. $\rightarrow B'(-10;1)$

c) $C(8;3)$, $I(2;1)$, $k = \frac{1}{2}$. $\rightarrow C'(5;2)$

d) $P(-3;2), Q(1;1), R(2;-4)$, $I \equiv O, k = -1/3$ $\rightarrow P'(1;-\frac{2}{3}), Q'(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}), R'(-\frac{2}{3};\frac{4}{3})$

HD : a) Gọi : $A(1;2) \xrightarrow{V_{(I;2)}} A'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow (x'-3;y'+1) = 2(-2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} x'-3 = -4 \\ y'+1 = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;5) .$$

2 Cho ba điểm $A(0;3), B(2;-1), C(-1;5)$. Tồn tại hay không tồn tại một phép vị tự tâm A , tỉ số k biến B thành C ?

HD : Gỉa sử tồn tại một phép vị tự tâm A , tỉ số k biến B thành C .

Khi đó : $B \xrightarrow{V_{(A;k)}} C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = k(2) \\ 2 = k(-4) \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

Vậy : Tồn tại phép vị tự $V_{(A;-\frac{1}{2})} : B \longmapsto C$.

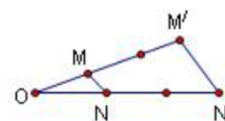
3 Cho ba điểm $A(-1;2), B(3;1), C(4;3)$. Tồn tại hay không tồn tại một phép vị tự tâm A , tỉ số k biến B thành C ?

HD : Gỉa sử tồn tại một phép vị tự tâm A , tỉ số k biến B thành C .

Khi đó : $B \xrightarrow{V_{(A;k)}} C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (1) .

4 Cho ΔOMN . Dựng ảnh của M,N qua phép vị tự tâm O , tỉ số k trong mỗi trường hợp sau :

a) $k = 3$ b) $k = \frac{1}{2}$ c) $k = -\frac{3}{4}$

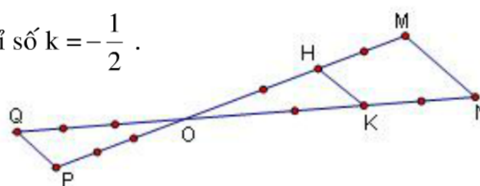


Giải

a) Phép vị tự $V_O^3 : M \longmapsto M'$, $N \longmapsto N'$ thì ta có $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON'} = 3\overrightarrow{ON}$

b) Phép vị tự $V_O^{1/2} : M \longmapsto H$, $N \longmapsto K$ thì HK là đường trung bình của ΔOMN .

c) Phép vị tự $V_O^{-3/4} : M \longmapsto P$, $N \longmapsto Q$ thì ta có $\overrightarrow{OP} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OQ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{ON}$



5 Cho hình bình hành ABCD (theo chiều kim đồng hồ) có tâm O . Dựng :

a) Ảnh của hình bình hành ABCD qua phép vị tự tâm O , tỉ số k = 2 .

b) Ảnh của hình bình hành ABCD qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

Giải

a) Gọi $V_O^2 : A \longmapsto A'$ thì $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$

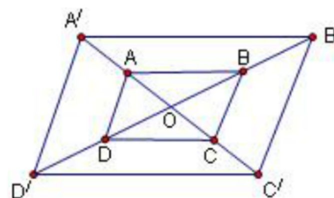
$B \longmapsto B'$ thì $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$

$C \longmapsto C'$ thì $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$

$D \longmapsto D'$ thì $\overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow V_O^2 :$ □ABCDM $\longmapsto$ □$A'B'C'D'$.

Ta vẽ : $AB // A'B', BC // B'C', CD // C'D', DA // D'A'$



b) Gọi $V_O^{-1/2} : A \longmapsto P$ thì $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

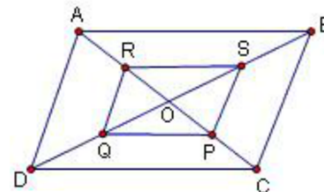
$B \longmapsto Q$ thì $\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$C \longmapsto R$ thì $\overrightarrow{OR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$D \longmapsto S$ thì $\overrightarrow{OS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow V_O^{-1/2} :$ □ABCDM $\longrightarrow$ □PQRS .

Ta vẽ : $AB // PQ, BC // QR, CD // RS, DA // SP$.



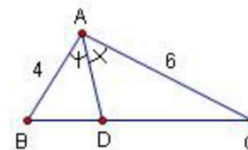
6 Cho ΔABC có AB = 4, AC = 6 , AD là phân giác trong của $\hat{A}$ của ΔABC $(D \in BC)$. Với giá trị nào của k thì phép vị tự tâm D , tỉ số k biến B thành C .

HD :

Theo tính chất của phân giác trong của $\hat{A}$, ta có :

$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DB} \Rightarrow B \xrightarrow{V_{(D;-3/2)}} C$.

Do $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng .



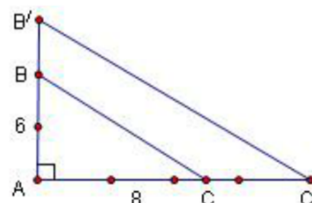
7 Cho ΔABC vuông ở A và AB = 6, AC = 8 . Phép vị tự $V_{(A;\frac{3}{2})}$ biến B thành B′,C thành C′ .

Khẳng định nào sau đây sai ?

A) BB′C′C là hình thang . B) B′C′ = 12 . C) $S_{AB'C'} = \frac{9}{4}S_{ABC}$. D) Chu vi (ΔABC) = $\frac{2}{3}$Chu vi($\Delta AB'C'$) .

HD :

- A) đúng vì $B'C' \xrightarrow{V_{(A;3/2)}} BC$.
- B) sai vì : $B'C' = \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = 15$
- C) đúng vì : $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}.AB'.AC'}{\frac{1}{2}.AB.AC} = \frac{\frac{3}{2}.AB.\frac{3}{2}.AC}{AB.AC} = \frac{9}{4}$.
- D) đúng vì : $\frac{\text{Chu vi } AB'C'}{\text{Chu vi } ABC} = \frac{3}{2}$



8 Cho ΔABC có hai đỉnh là B và C cố định , còn đỉnh A di động trên đường tròn (O) cho trước . Tìm tập hợp các trọng tâm của ΔABC .

HD : Gọi I là trung điểm của BC . Ta có I cố định . Nếu G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Vậy G là ảnh của A qua phép vị tự $V_I^{1/3}$.

Tập hợp điểm A là đường tròn (O) nên tập hợp G là đường tròn (O′) , đó chính là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V_I^{1/3}$.

9 Trong mpOxy , cho điểm $A(-1;2)$ và đường thẳng d đi qua A có hệ số góc bằng 1 . Gọi B là đường thẳng di động trên d . Gọi C là điểm sao cho tứ giác OABC là hình bình hành .Tìm phương trình tập hợp :

a) Các tâm đối xứng I của hình bình hành .

b) Các trọng tâm G các tam giác ABC .

HD :

a)

- (AB): $\begin{cases} \text{Qua } A(-1;2) \\ \text{Hsg} : k = 1 \end{cases} \rightarrow (AB) : y - 2 = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x + 3$
- Vậy B chạy trên d thì I chạy trên d′ // d và đi qua trung điểm $M(-\frac{1}{2};1)$ của đoạn OA .

  Vậy $d' : x - y + \frac{3}{2} = 0$.

b) ◆ Ta có : $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \Rightarrow G = V_O^{2/3}(B)$. Vậy G chạy trên đt d″// d và qua điểm $N(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}) == V_O^{2/3}(A)$.

$\Rightarrow d'': x - y + 2 = 0$.

10 Tìm ảnh của các đường thẳng d qua phép vị tự tâm I , tỉ số k :

a) $d: 3x - y - 5 = 0$,$V(O;-\frac{2}{3})$ $\rightarrow d': 9x - 3y + 10 = 0$

b) $d: 2x + y - 4 = 0$,$V(O;3)$ $\rightarrow d': 2x + y - 12 = 0$

c) $d: 2x + y - 4 = 0$,$V(I;-2)$ với $I(-1;2)$ $\rightarrow d': 2x + y + 8 = 0$

d) $d: x + 2y - 4 = 0$,$V(I;2)$ với $I(2;-1)$ $\rightarrow d': x + 2y - 8 = 0$

11 Tìm ảnh của các đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I , tỉ số k : (Có 2 cách giải)

a) $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$,$V(O;-2)$ $\rightarrow (C): (x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$

b) $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$,$V(O;2)$ $\rightarrow (C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

c) $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$,$V(I;-2)$ với $I(1;2)$ $\rightarrow (C): (x+3)^2 + (y-8)^2 = 20$

12 Tìm phép vị tự biến d thành d' :

a) $d: \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1, d': 2x - y - 6 = 0, V(O;k)$ $\rightarrow k = \frac{2}{3}$.

HD : $d: 2x - y - 4 = 0 \ // \ d': 2x - y - 6 = 0$. Lấy $A(2;0) \in d, B(3;0) \in d'$.

Vì : phép vị tự $V(O;k): A \longmapsto B \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$. Vì : $\overrightarrow{OA} = (2;0), \overrightarrow{OB} = (3;0) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$

Vậy : $A \xmapsto{V(O;\frac{3}{2})} B \Rightarrow d \xmapsto{V(O;\frac{3}{2})} d'$

Lưu ý : Vì O,A,B thẳng hàng nên ta chọn chúng cùng nằm trên một đường thẳng . Để đơn giản ta chọn chúng cùng nằm trên Ox hoặc Oy .

b) $(C_1): (x+4)^2 + y^2 = 2$; $(C_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$ $V(I;-2), I(-2;1)$

HD :

- (C_1) có tâm $I_1(-4;0), R_1 = \sqrt{2}$, (C_2) có tâm $I_2(2;3), R_2 = 2\sqrt{2}$
- Gỉa sử :$(C_1) \xmapsto{V(I;k)} (C_2)$ thì :

 $R_2 = |k| R_1 \Leftrightarrow |k| = \frac{R_2}{R_1} = 2 \Leftrightarrow k = \pm 2$

 $\overrightarrow{II_2} = k\overrightarrow{II_1}$ thì

 ★ $k = -2$. Gọi $I(x_o;y_o)$ thì $(2 - x_o; 3 - y_o) = -2(-4 - x_o; -y_o) \Rightarrow I(-2;1)$

 ★ $k = 2$. Gọi $I(x_o;y_o)$ thì $(2 - x_o; 3 - y_o) = 2(-4 - x_o; -y_o) \Rightarrow I(-10;-3)$

Vậy có 2 phép vị tự biến $(C_1) \longrightarrow (C_2)$ là $V(I;-2)$ với $I(-2;1)$ hoặc $V(I;2)$ với $I(-10;-3)$

13 Trong mpOxy , cho 2 đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ và $(C_2): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$.

a) Xác định toạ độ tâm vị tự ngoài của hai đường tròn đó .

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn đó .

HD : (C_1) có tâm $I_1(1;3)$, bk : $R_1 = 1$; (C_2) có tâm $I_2(4;3)$, bk : $R_2 = 2$.

a) Gọi I là tâm vị tự ngoài của (C_1) và (C_2) , ta có : $\overrightarrow{II_2} = k\overrightarrow{II_1}$ với $k = \frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow I(-2;3)$

b) Tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn là tiếp tuyến từ I đến (C_1).

Gọi đt Δ đi qua I và có hệ số góc k $\Rightarrow \Delta: y - 3 = k(x+2) \Leftrightarrow ky - y + 3 + 2k = 0$.

Δ tiếp xúc $(C_1) \Leftrightarrow d(I_1;\Delta) = R_1 \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1: \sqrt{2}.x - 4y + 12 + 3\sqrt{2} = 0 \\ \Delta_2: \sqrt{2}.x + 4y - 12 + 3\sqrt{2} = 0 \end{array}\right.$

14 Cho đường tròn (O,R) đường kính AB . Một đường tròn (O′) tiếp xúc với (O,R) và đoạn AB tại C, D , đường thẳng CD cắt (O,R) tại I . Chứng minh rằng : $\overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{BI}$.

HD :

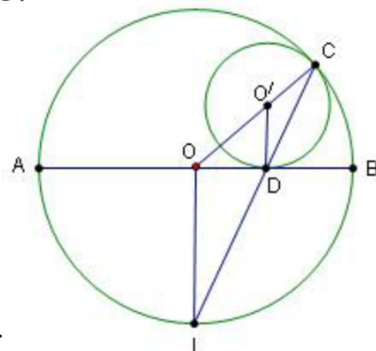
- C là tâm vị tự của 2 đường tròn (O) và (O′) .
- $D \in (O')$, $I \in (O)$ và ba điểm C,D,I thẳng hàng .

Gọi R′ là bán kính của đường tròn (O′) , khi đó :

$$V_C^{\frac{R'}{R}} : O \longmapsto O', I \longmapsto D$$

$\Rightarrow OI \,//\, O'D \Rightarrow OI \perp AB$ (Vì $O'D \perp AB$)

$\Rightarrow$ I là trung điểm của $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{BI}$.



15 Cho hai đường tròn (O,R) và (O′, R′) tiếp xúc trong tại A (R > R′) . Đường kính qua A cắt (O,R) tại B và cắt (O′, R′) tại C . Một đường thẳng di động qua A cắt (O, R) tại M và cắt (O′, R′) tại N . Tìm quỹ tích của I = BN ∩ CM .

HD :

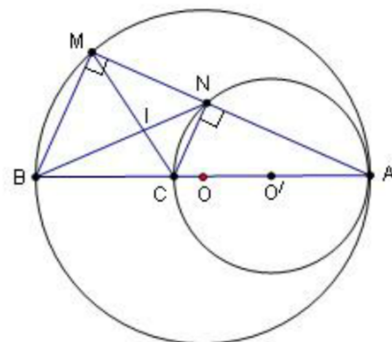
Ta có : BM // CN . Hai ΔBMI ∽ ΔNCI . Do đó : $\dfrac{IC}{IM} = \dfrac{CN}{BM}$

Hai ΔACN ∽ ΔABM . Do đó : $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CN}{BM}$

$\Rightarrow \dfrac{IC}{IM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2R'}{2R} = \dfrac{R'}{R} \Rightarrow \dfrac{IC}{IM + IC} = \dfrac{R'}{R + R'}$

$\Rightarrow \dfrac{CI}{CM} = \dfrac{R'}{R + R'} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \dfrac{R'}{R + R'}\overrightarrow{CM} \Rightarrow M : \xrightarrow{V(C;k=\frac{R'}{R+R'})} I$

Vậy : Tập hợp các điểm I là đường tròn (ω) vị tự của đường tròn (O,R) trong phép vị tự $V(C\,;k = \dfrac{R'}{R + R'})$.



16 Cho ΔABC . Gọi I , J . M theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và IJ . Đường tròn ngoại tiếp tâm O của ΔAIJ , cắt AO tại A′ . Gọi M′ là chân đường vuông góc hạ từ A′ xuống BC . Chứng minh rằng : A , M , M′ thẳng hàng .

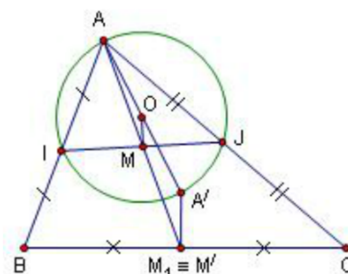
HD :

Gọi M_1 là trung điểm BC .Ta có : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$

Từ đó : $\Delta AIJ \xrightarrow{V(A;2)} \Delta ABC$. Khi đó :

$V_{(A;2)} : O \longmapsto A', M \longmapsto M_1 \;\Rightarrow OM \perp IJ \Rightarrow A'M_1 \perp BC$.

Như thế : $M_1 \equiv M' \Rightarrow A, M, M'$ thẳng hàng (vì A, M, M_1 thẳng hàng)



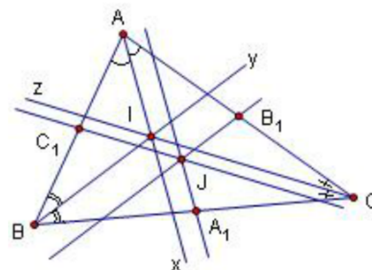
17 Cho ΔABC . Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của BC,CA, AB. Kẻ A_1x, B_1y, C_1z lần lượt song song với các đường phân giác trong của các góc A,B,C của ΔABC . Chứng minh : A_1x, B_1y, C_1z đồng quy.

HD :

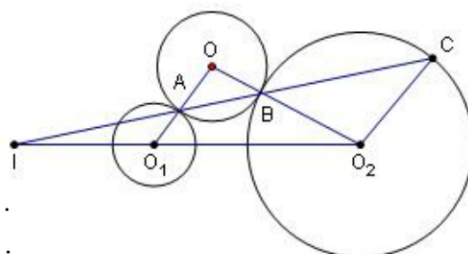
Xét phép vị tự tâm G , tỉ số $-\dfrac{1}{2}$. G là trọng tâm ΔABC , I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Ta có : $AJ \longmapsto A_1x$, $BI \longmapsto B_1y$, $CI \longmapsto C_1z$,

$I \longmapsto J$ ($\dfrac{GI}{GJ} = -\dfrac{1}{2}$) $\Rightarrow A_1x, B_1y, C_1z$ đồng quy tại J .



18 Cho hai đường tròn (O_1,R_1) và (O_2,R_2) ngoài nhau $R_1 \neq R_2$. Một đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với (O_1) tại A và tiếp xúc ngoài với (O_2) tại B . Chứng minh rằng : Đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định .



HD :

A là tâm vị tự biến (O_1) thành (O) : $\overrightarrow{AO_1}$ và $\overrightarrow{AO}$ ngược hướng .

B là tâm vị tự biến (O) thành (O_2) : $\overrightarrow{AO_1}$ và $\overrightarrow{AO}$ ngược hướng .

Kéo dài AB cắt (O_2) tại C : $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{CO_2}$ ngược hướng .

Vậy : $\overrightarrow{AO_1}$ và $\overrightarrow{CO_2}$ ngược hướng . Như vậy AC hay cũng là AB phải đi qua tâm I à tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2) .

19 Cho ΔABC . Người ta muốn định ba điểm A',B',C' lần lượt trên các cạnh BC,CA,AB sao cho $\Delta A'B'C'$ đều và $A'B' \perp CA$, $B'C' \perp AB$ và $C'A' \perp BC$.

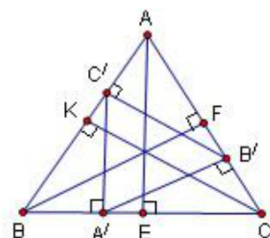
1. Gọi E,F,K lần lượt là chân các đường cao phát xuất từ A,B,C .

Đặt : $C' = V_B^{2/3}(A), A' = V_B^{2/3}(E), B' = V_B^{2/3}(F)$.

a) Nghiệm lại rằng : $A' = V_B^{2/3}(E)$ và $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$.

b) Suy ra rằng : $\Delta A'B'C'$ đều .

2. Chứng minh rằng trực tâm H của ΔABC cũng là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.



HD :

Trong ΔABC đều các đường cao : $AE = BF = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.(a là cạnh của ΔABC)

và E,F,K lần lượt là trung điểm các cạnh .

1. a) Vì $A' = V_B^{2/3}(E) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$. Vậy : $A' = V_B^{2/3}(E)$.

Vì $C' = V_B^{2/3}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow B' = V_A^{2/3}(C)$.

Vậy : $C \xmapsto{V_A^{2/3}} B', K \xmapsto{V_A^{2/3}} C' \Rightarrow \overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$.

b) Ta có : $\overrightarrow{B'C'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} \Rightarrow \begin{cases} B'C' // CK \text{ cùng } \perp AB \\ B'C' = \frac{2}{3}CK = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Tương tự : $\overrightarrow{C'A'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ và $A'B' = \frac{2}{3}BF$.

Vậy : $B'C' \perp AB, C'A' \perp BC, A'B' \perp AC$ và $B'C' = C'A' = A'B' = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \Delta A'B'C'$ đều .

2. Trực tâm H của ΔABC cũng là trọng tâm của tam giác đó , nên :

$\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$. Mà : $\overrightarrow{BC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BC'} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{C'H} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$.

Vậy : $C'H // AF$. Suy ra : $C'H \perp A'B'$

Lý luận tương tự : $A'H \perp B'C'$.

Vấn đề 8 : PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 ĐN : Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M , N và ảnh M′, N′ là ảnh của chúng , ta có $M'N' = k.MN$.

2 ĐL : Mọi phép đồng dạng F tỉ số k (k> 0) đều là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình D.

3 Hệ quả : (Tính chất) Phép đồng dạng :

1. Biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng (và bảo toàn thứ tự) .
2. Biến đường thẳng thành đường thẳng .
3. Biến tia thành tia .
4. Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên k (k là tỉ số đồng dạng) .
5. Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó (tỉ số k).
6. Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = k.R$.
7. Biến góc thành góc bằng nó .

4 Hai hình đồng dạng :

ĐN : Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng biến hình này thành hình kia .

H đồng dạng G $\Leftrightarrow$ $\exists$ F đồng dạng : $H \xmapsto{F} G$

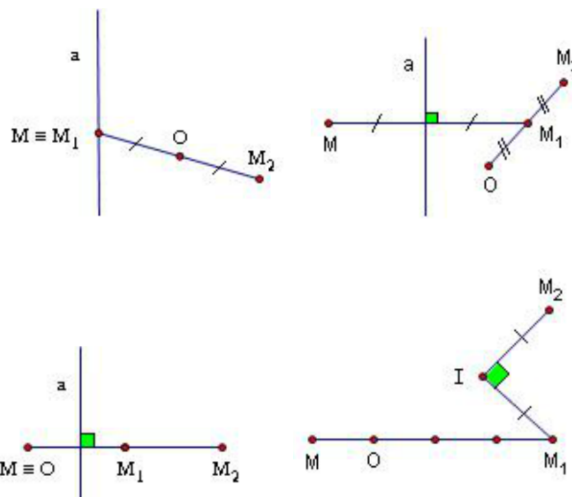
B.BÀI TẬP

1 Cho điểm M

a) Dựng ảnh của phép đồng dạng F là hợp thành của phép đối xứng trục $Đ_a$ và phép vị tự V tâm O , với $O \notin a$, tỉ số k = 2 .

b) Dựng ảnh của phép đồng dạng F là hợp thành của phép vị tự V tâm O , tỉ số k = −3 và phép quay tâm I với góc quay $\varphi = 90^\circ$.

Giải



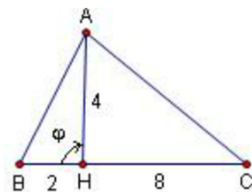
a) Gọi : $M \xmapsto{Đ_a} M_1 \xmapsto{V_O^2} M_2$

- $M \in (a)$ thì $M_1 \equiv M$ và M là trung điểm OM_2
- $M \notin (a)$ và $O \neq M_1$ thì :
  - a là trung trực đoạn MM_1
  - M_1 là trung điểm đoạn OM_2
- $M \notin (a)$ và $O \equiv M_1$ thì :
  - a là trung trực đoạn MM_1
  - M_1 là trung điểm đoạn OM_2

b) Gọi $M \xmapsto{V_O^{-3}} M_1 \xmapsto{Q_I^{90^\circ}} M_2$. Khi đó :

$\overrightarrow{OM_1} = -3\overrightarrow{OM}$, $IM = IM_1$ và $(IM_1; IM) = 90^\circ$

2 Cho ΔABC có đường cao AH . H ở trên đoạn BC . Biết AH = 4 , HB = 2 , HC = 8 . Phép đồng dạng F biến ΔHBA thành ΔHAC . F được hợp thành bởi hai phép biến hình nào dưới đây ?



A) Phép đối xứng tâm H và phép vị tự tâm H tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

B) Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BA}$ và phép vị tự tâm H tỉ số k = 2 .

C) Phép vị tự tâm H tỉ số k = 2 và phép quay tâm H , góc (HB;HA) .

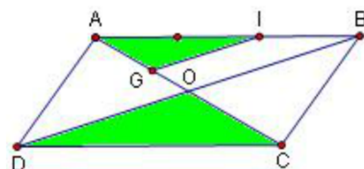
D) Phép vị tự tâm H tỉ số k = 2 và phép đối xứng trục .

HD :

Phép V_H^2 và Q(H;φ) với φ = (HB;HA) : $B \longmapsto A,\ A \longmapsto C$

Vậy : F là phép đồng dạng hợp thành bởi V và Q biến ΔHBA thành ΔHAC .

3 Cho hình bình hành ABCD có tâm O . Trên cạnh AB lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và gọi G là trọng tâm của ΔABD . F là phép đồng dạng biến ΔAGI thành ΔCOD . F được hợp thành bởi hai phép biến hình nào sau đây ?



A) Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{GO}$ và phép vị tự V(B; −1) .

B) Phép đối xứng tâm G và phép vị tự $V(B;\frac{1}{2})$.

C) Phép vị tự $V(A;\frac{3}{2})$ và phép đối xứng tâm O .

D) Phép vị tự $V(A;\frac{2}{3})$ và phép đối xứng tâm G .

HD :

- Vì G là trọng tâm ΔABD nên $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$
- Theo giả thiết , ta có : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AJ}$.
- Phép đối xứng tâm O , biến A thành C và B thành D (O là bất biến)
- $A \xmapsto{V_A^{2/3}} A \xmapsto{Đ_O} C$. - $G \xmapsto{V_A^{2/3}} O \xmapsto{Đ_O} O$. - $I \xmapsto{V_A^{2/3}} B \xmapsto{Đ_O} D$.

$$\Rightarrow \Delta AGI \xrightarrow{V(A;\frac{3}{2})} \Delta AOB \xrightarrow{Đ_O} \Delta COD$$

Phép đồng dạng F

. . . . HẾT . . . .